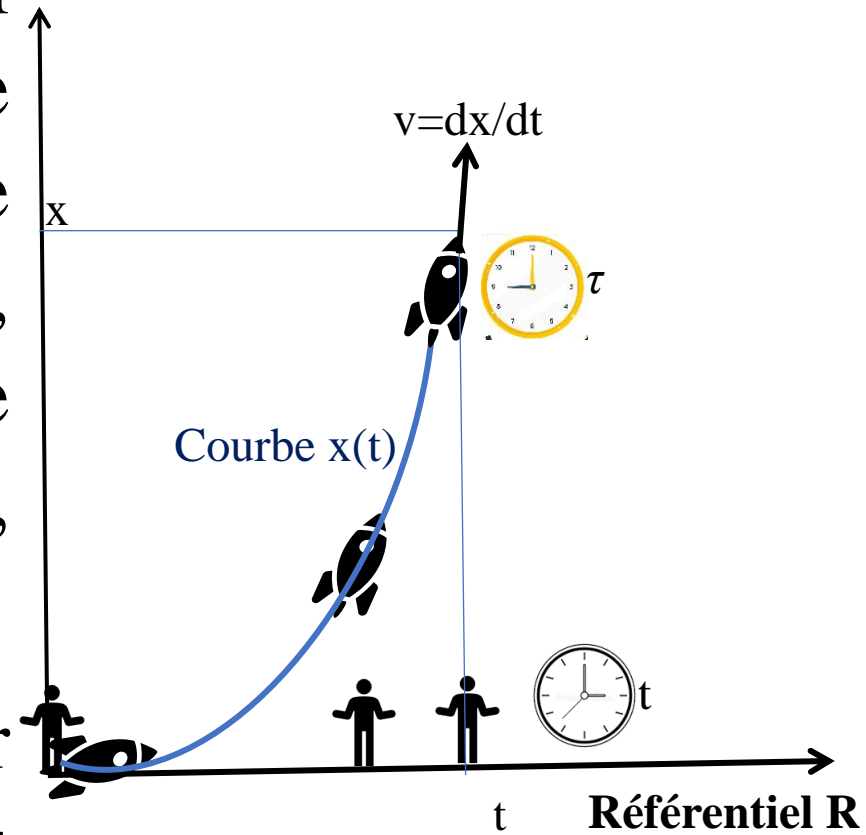


# EQUATION TSIOLKOVSKI RELATIVISTE

L'équation de Tsiolkovski classique, donne l'accroissement de vitesse  $\Delta V$ . Etablie dans le référentiel co-mobile de la fusée, son paramètre dynamique est le **temps propre** de l'astronaute, mesuré par sa montre.

Au sol, le temps propre, donné par sa montre est  $t$  et  $x$ , résulte du balisage établi de son référentiel **R**. La vitesse de la fusée, tangente à la courbe  $x(t)$  de sa trajectoire vaut  $v = dx/dt$  pour l'observateur au sol.



Pour un mouvement accéléré, la relation générale entre ces paramètres est donnée par une relation du type :[1]

$$t = a^{-1} \sinh(a.\tau) , x = a^{-1} \cosh(a.\tau) \quad (1)$$

où  $t$ ,  $x$  sont les coordonnées du référentiel de départ  $\mathbf{R}$  de la fusée,  $a$  l'accélération propre et  $\tau$  le temps propre de l'observateur dans la fusée.

Considérons cette équation (1), à la fin de la propulsion.

La vitesse dans le référentiel  $\mathbf{R}$  vaut  $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$ : dérivons (1)

$$dx = \sinh(a\tau)d\tau, dt = \cosh(a\tau)d\tau : \quad \text{ceci donne}$$

$$\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt = \tanh(a\tau) \quad (2.1) \quad \text{où } a\tau = V = v_e \ln(m_i/m_f) \quad (2.2)$$

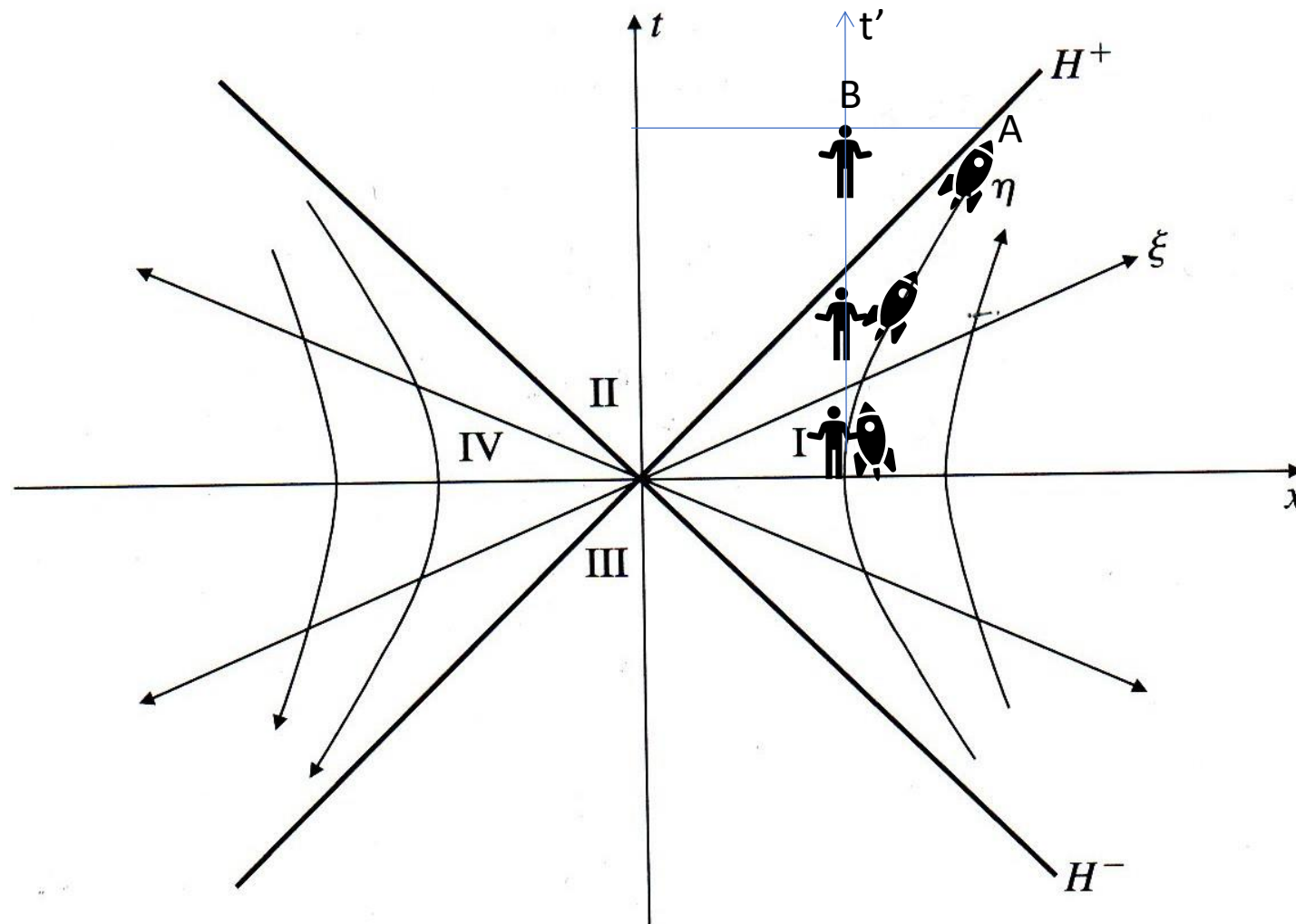
$V$  est la vitesse acquise dans le référentiel de la fusée, obtenu en intégrant l'accélération propre durant le temps propre  $\tau$  de propulsion (principe de la navigation inertielle).

En reportant (2.2) dans (2.1), la vitesse dans  $\mathbf{R}$  vaut:

$$\mathbf{v} = \tanh(v_e \ln(m_i/m_f)) \quad (3)$$

Si  $v \ll c$ , on obtient  $v/c \approx (v_e/c) \ln(m_i/m_f)$ , c'est l'équation de Tsiolkovski classique.

Utilisons les coordonnées de Rindler, bien adaptées à ce type de phénoménologie.



Lorsque la fusée est en A, elle est au-delà de l'horizon pour l'observateur B resté immobile dans le référentiel de départ.

# NOTE

1- Ici, l'accélération  $a(\tau)$  dépend du temps. Ce qui est noté « a.τ » vaut  $\int_{\tau_0}^{\tau_f} a(\tau) d\tau = V$ . C'est la vitesse finale dans le référentiel propre, celle mesurée par l'astronaute en intégrant les données d'un accéléromètre embarqué.

Autre démonstration, chapitre « Special relativity » sur le lien:

[https://en.wikipedia.org/wiki/Tsiolkovsky\\_rocket\\_equation](https://en.wikipedia.org/wiki/Tsiolkovsky_rocket_equation)