

## Rappel: La forme de Schwarzschild

Nous avons montré que celle-ci s'établit en considérant une forme générique de géométrie à symétrie sphérique:

$$ds^2 = A(t,r).dt^2 - B(t,r).dr^2 - r^2. d\Omega^2$$

$$(d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta. d\phi^2)$$

En particulierisant la solution dans le cadre de la Relativité Générale (vide):

$$ds^2 = (1+\mu/r).dt^2 - (1+\mu/r)^{-1}.dr^2 - r^2.d\Omega^2$$

La limite Newtonienne à l'infini permet de finaliser<sup>1</sup>:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Gm}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2Gm}{r}} + r^2 * d\Omega^2$$

Où M est la masse de la mécanique Newtonienne.

Métrie statique et un paramètre de longueur associé à une masse apparaît :  $r_s = 2GM (/c^2)$ , ( $c = 1$ )

Pour le calcul complet détaillé:

<http://www-cosmosaf.iap.fr/MIT-RG-27.pdf> p.5-14

Cette équation «explose» pour  $r = r_s$  (singularité de coordonnées): Signification physique?

---

<sup>1</sup> En fait cette forme est due à Droste, la forme de Schwarzschild originale étant plus restrictive (valable à l'extérieur de l'horizon).

## La forme de Painlevé déduite de celle de Schwarzschild

Bien que Painlevé ait posé à priori sa solution, sans expliciter sa motivation, on peut montrer qu'elle dérive naturellement de la forme de Schwarzschild (coordonnées  $r, t$ ) en considérant dans ces coordonnées de Schwarzschild l'équation **géodésique radiale de type temps sans vitesse initiale à l'infini**, associée à un observateur (dit de Painlevé) de quadri-vitesse  $U^\mu$ .

Cette équation géodésique détermine les composantes  $t'$  et  $r'$  de  $U^\mu$  (dérivées par rapport au temps propre de l'observateur de  $t$  et  $r$ ). Nous allons voir que ces composantes dans leur forme covariante  $U_0, U_r$  pourront être considérées comme le gradient d'une fonction scalaire  $T(t,r)$  qui va se révéler être le temps propre de l'observateur de Painlevé défini ci dessus!

En normalisant l'énergie ( $E = e/m = 1$ ) on obtient :

$$t' = \frac{1}{1 - \frac{2Gm}{r}} \rightarrow r'^2 + 1 - \frac{2Gm}{r} = 1 \rightarrow r' = \pm \sqrt{1 - \left(1 - \frac{2Gm}{r}\right)} = \pm \sqrt{\frac{2Gm}{r}}$$

Soit: 
$$U^\mu = (t', r', 0, 0) = \left\{ \frac{r}{r-2Gm}, -\sqrt{\frac{2Gm}{r}}, 0, 0 \right\}$$

La première équation résulte de la conservation de l'énergie<sup>2</sup> sur une géodésique liée au vecteur de Killing temps:

$$K^\mu = (\partial_t)^\mu = \{1, 0, 0, 0\}:$$

---

<sup>2</sup> Voir théorème de Noether pour les quantités conservées associées aux invariances. Ici la solution est statique (invariante par translation dans le temps): L'énergie, associée au temps est conservée sur une géodésique.

$$E = -K_\mu \frac{dt}{d\tau} = -K_\mu t' \text{ avec } K_\mu = g_{\mu\nu} K^\nu = g_{00} K^0 = g_{00}$$

La deuxième s'obtient à partir de la première et de la normalisation 4-vitesse ( $U_\mu U^\mu = -1$ )<sup>3</sup>

Sélectionnons  $-(r_s/r)^{1/2}$  correspondant à la **géodésique radiale entrante** (orientée vers  $r = 0$ ).

A partir de la quadri-vitesse contravariante, on peut calculer la quadri-vitesse covariante:

$$U_\mu = g_{\mu\nu} U^\nu \rightarrow \{g_{00} U^0, g_{11} U^1, 0, 0\} = \{-1, -\frac{(r \cdot r_s)^{1/2}}{(r - r_s)}, 0, 0\}$$

et comme les variables  $t, r$  se séparent on peut la considérer comme le gradient d'une fonction scalaire de  $T(r, t)$  soit:

$$U_\mu = -\partial_\mu T = \{-1, -(r \cdot r_s)^{1/2}/(r - r_s), 0, 0\} \rightarrow dT = dt + \frac{\sqrt{2Gmr}}{r - 2Gm} dr$$

En intégrant on obtient la fonction scalaire  $T(t, r)$  suivante :

$$\text{pour } r > 2Gm \quad (3-3-1)$$

$$T = t + \int \left( \frac{\sqrt{2Gmr}}{r - 2Gm} \right) dr = t + 2Gm \left( \sqrt{\frac{2r}{Gm}} + \ln \left( \frac{\sqrt{r} - \sqrt{2Gm}}{\sqrt{r} + \sqrt{2Gm}} \right) \right)$$

<sup>3</sup> Qui se réduit ici sur la géodésique radiale à :  $U_t U^t + U_r U^r = -1$ , avec  $U_\mu = g_{\mu\nu} U^\nu$ .

$$\text{Pour } r < 2Gm \qquad (3-3-2)$$

$$T = t + \int \left( \frac{\sqrt{2Gmr}}{r - 2Gm} \right) dr = t + 2Gm \left( \sqrt{\frac{2r}{Gm}} + \ln \left( \frac{\sqrt{2Gm} - \sqrt{r}}{\sqrt{r} + \sqrt{2Gm}} \right) \right)$$

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2Gm}{r} \right) dt^2 + 2 \sqrt{\frac{2Gm}{r}} dr \cdot dt + (dr^2 + r^2 (\sin(\theta)^2 d\varphi^2 + d\theta^2))$$

Le changement de coordonnées, selon que  $r > 2Gm$  ou  $r < 2Gm$  dans la forme de Schwarzschild donne la forme "**entrante**"<sup>4</sup> ci dessus.

Notons que les fonctions (3-3-x) sont singulières pour  $r = 2Gm = r_s$  (elles valent  $-\infty$ , et leur dérivée en ce point est discontinue) et que nous avons besoin de deux fonctions pour cette transformation. C'est le prix à payer pour éliminer la singularité sur l'horizon<sup>5</sup>.

Les coordonnées  $r, \theta, \varphi$  restent les mêmes que dans la forme de Schwarzschild, mais nous avons une nouvelle coordonnée de temps  $T$  qui va se révéler avoir la même valeur, bien qu'étant de nature différente, que le temps propre  $\tau$  (paramètre affine mesurable par une horloge) d'un observateur que nous appellerons observateur de Painlevé, en chute libre radiale vers la singularité centrale partant de l'infini à vitesse nulle.

Cette propriété explique tout l'intérêt que cette forme peut présenter, ce que nous allons nous attacher à montrer dans la suite du document!

---

<sup>4</sup> Bien que Painlevé ait défini la forme sortante, nous nous intéressons à la forme entrante, gardant à l'esprit l'existence de cette forme sortante spatio-temporellement symétrique. L'équation (3-4) où  $T$  est noté  $t$  montre qu'on passe à la forme sortante, où seul le signe de  $dr \cdot dt$  change, en inversant le signe du deuxième terme du membre de droite des équations (3-3-1 et (3-3-2). Ceci suggère que la solution complète inclut les deux formes!

<sup>5</sup> Une fonction non continûment dérivable aux ordres 1 et 2, ne peut être rendue continûment dérivable à ces ordres que par une transformation qui est elle-même non continûment dérivable à ces ordres et vice versa.

## Quadri-vitesse de l'observateur de Painlevé dans la forme de Painlevé

### Calcul de la quadri-vitesse contravariante

La coordonnée temps  $T$ , que nous noterons  $t$  ici pour ne pas alourdir les notations, étant le temps propre, dans cette forme de la métrique on a  $U^t = dt/d\tau = 1$ .

La normalisation de la quadri-vitesse,  $U_\mu U^\mu = -1$  où  $U_\mu = g_{\mu\nu} U^\nu$ , va nous permettre de calculer simplement  $U^r$  l'autre coordonnée non nulle de la quadri-vitesse radiale<sup>6</sup> (entrante)<sup>7</sup>:

$$U^\mu = \left(1, -\sqrt{\frac{r_s}{r}}, 0, 0\right)$$

Démonstration:

$$U_t = g_{tt}U^t + g_{tr}U^r = -[1 - (r_s/r)](1) + (r_s/r)^{1/2} \cdot U^r = -(1 - r_s/r) + (r_s/r)^{1/2} \cdot U^r$$

$$U_r = g_{rr}U^r + g_{rt}U^t = (1) \cdot U^r + (r_s/r)^{1/2} \cdot (1)$$

$$= (r_s/r)^{1/2} + U^r$$

$$U_\mu U^\mu = U_t U^t + U_r U^r = -1 = (1)[-1 + (r_s/r)] + U^r [(r_s/r)^{1/2} + U^r] \rightarrow$$

$$(U^r)^2 + 2(r_s/r)^{1/2} \cdot U^r + (r_s/r) = 0 = [(U^r) + (r_s/r)^{1/2}]^2 = 0$$

On obtient une équation du second degré en  $U^r$  avec une racine double :

$$(U^r) = -(r_s/r)^{1/2}.$$

<sup>6</sup> La quadri-vitesse radiale de l'observateur de Painlevé en coordonnées sphériques  $(t, r, \theta, \varphi)$  est le 4-vecteur défini par  $U^\mu = [dt/d\tau, dr/d\tau, 0, 0]$  dans la forme de Painlevé. Cette 4-vitesse définit un champ de vecteurs tangent à la géodésique suivie par l'observateur. La géodésique est la courbe intégrale de ce champ de vecteurs.

<sup>7</sup> La vitesse sortante aurait le signe + pour la composante  $r'$ .

## Quadri-vitesse Covariante

$$U_0 = g_{tt}U^t + g_{tr}U^r = -(1 - r_s/r)(1) + (r_s/r)^{1/2}(-r_s/r)^{1/2} = -1,$$
$$U_r = g_{rr}U^r + g_{rt}U^t = (1)(-r_s/r)^{1/2} + (1)(r_s/r)^{1/2} = 0.$$

Le vecteur quadri-vitesse de l'observateur de Painlevé en coordonnées covariantes prend la forme non triviale:

$$U_\mu = U^\nu \cdot g_{\mu\nu} = (-1, 0, 0, 0)$$

Cette forme n'a qu'une composante et elle est constante (indépendante des coordonnées)!

Par exemple, dans la forme de Schwarzschild, il n'existe pas d'observateur ayant cette propriété.

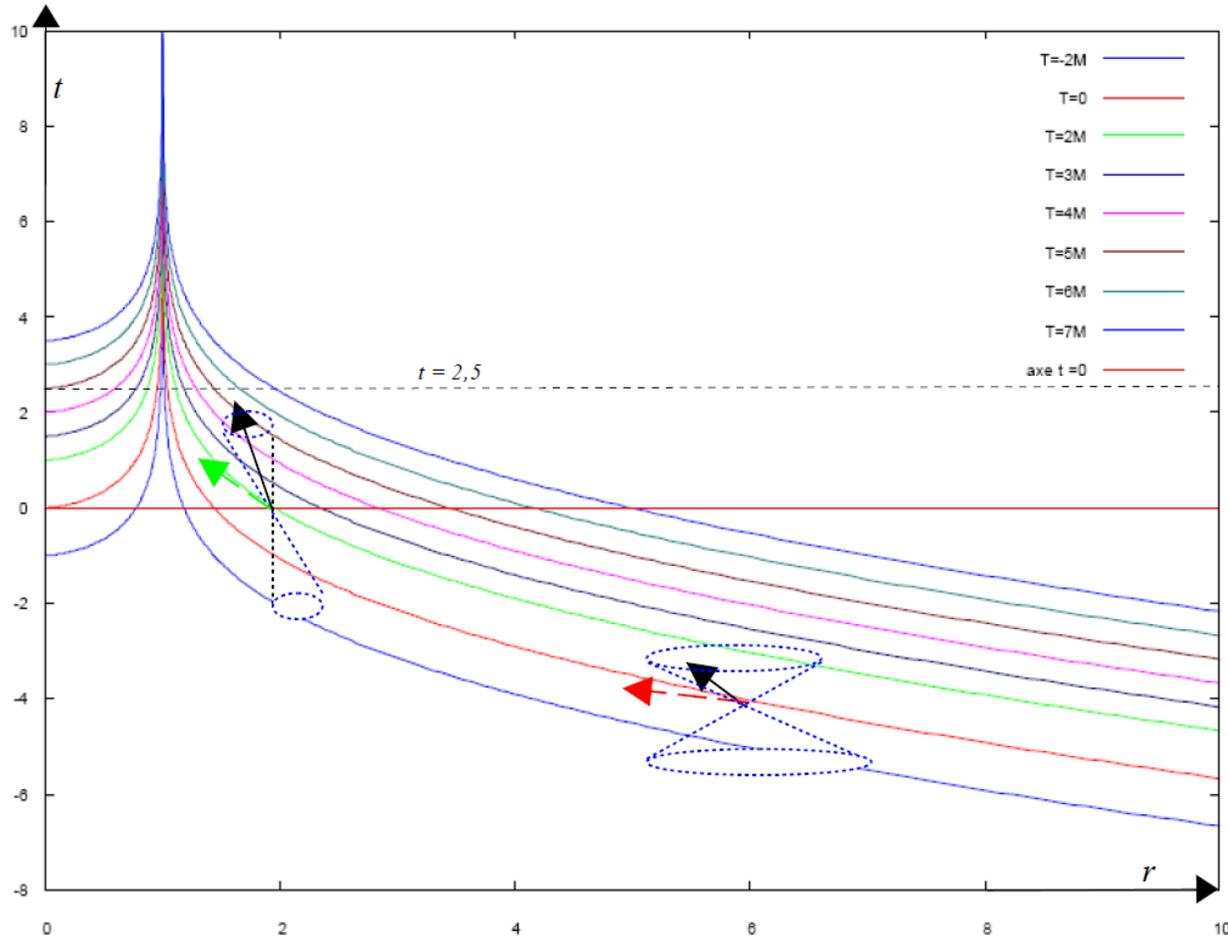
*Cette relation qui est satisfaite pour la forme de Painlevé est donc très restrictive.*<sup>8</sup>

En effet si cette propriété est trivialement vérifiée dans le référentiel propre de l'observateur (dont la forme de Lemaître donne une métrique, mais qui dépend du temps) elle n'est pas triviale dans une forme stationnaire globale, comme celle de Painlevé!!!

---

<sup>8</sup> On retrouve cette valeur de  $U_\mu$ , de façon triviale, dans la forme de Lemaître (non stationnaire) puisqu'elle est attachée au référentiel de l'observateur de Painlevé. Mais bien sûr notre remarque s'applique à cet espace temps. Dans la métrique de Robertson Walker on trouve aussi une vitesse covariante de ce type.

# Représentation des isochrones de l'observateur de Painlevé dans la forme de Schwarzschild



**Figure 6-1:**<sup>9</sup> Courbes  $T = cste$  représentées sur un diagramme cartésien en **coordonnées de Schwarzschild**<sup>10</sup>.

<sup>9</sup> Tracé avec Maxima

<sup>10</sup> Ce type de diagramme nous sert à représenter des fonctions des coordonnées données sur des axes cartésiens. En coordonnées de Schwarzschild, il se trouve que la coordonnée temps est localement orthogonale (en métrique relativiste) à la coordonnée radiale, mais ce n'est pas toujours le cas (par exemple dans la forme de Painlevé où nous utiliserons aussi

On a posé  $2GM/c^2=1$ ,  $c=1$ ,  $G=1$ ,  $2M=1$ .

Coordonnée  $r$  horizontale,  $t$  verticale.

Deux cônes de lumière ont été représentés en deux points.

Ils permettent de visualiser l'orthogonalité (symétrie par rapport à la surface du cône) de la quadri-vitesse aux hypersurfaces  $T = \text{Constante}$ .

La figure (6-1) donne un embryon de représentation des coordonnées de Painlevé dans un diagramme correspondant à celles de Schwarzschild.

Ajoutons que compte tenu de la symétrie sphérique, chaque point de la courbe est représentatif d'une sphère de rayon  $r$ .

Pour compléter, on a également représenté un vecteur  $V^\mu$  tangent à la courbe  $T = \text{cste}$  en chacun de ces deux points (en tirets de la couleur de l'isochrone).

Il est orthogonal<sup>11</sup> au vecteur quadri-vitesse  $U^\mu$  en trait plein noir dont le module dépend inversement de l'écartement, à pas  $\Delta T$  constant, des courbes à  $T = \text{cste}$ .

On voit que, par exemple, pour le point  $r = 2$ ,  $t = 0$ , le module de la quadri-vitesse est plus grand qu'en  $r = 6$ ,  $t = -4$  du fait que les isochrones sont plus rapprochées.

---

des diagrammes de ce type). Mais même dans le cas de ce diagramme ces coordonnées de sont pas de même type (leur signature dans la métrique est différente). Aussi la géométrie des objets dans cette représentation doit être interprétée dans ce contexte. Par exemple l'orthogonalité entre deux vecteurs au même point est caractérisée par le fait que le cône de lumière en ce point en est la bissectrice, ce qui en général ne correspond pas à un angle droit entre les deux vecteurs sur la figure!

<sup>11</sup>  $V^\mu$  symétrique de  $U^\mu$  par rapport à la surface du cône de lumière)

## Géodésique radiale et hypersurfaces isochrones.

### Représentation dans le plan $r, t$ de Schwarzschild.

En comparant une géodésique suivie par l'observateur de Painlevé et des isochrones représentées en coordonnées de Schwarzschild, nous allons montrer qu'il existe une isochrone de temps propre de valeur finie<sup>12</sup>  $\iota_0$  dont la coordonnée  $t(r)$  est toujours supérieure celle de la géodésique dans l'intervalle  $r \in ]0, \infty[$ . Ceci prouve que l'observateur de Painlevé traverse l'horizon et atteint  $r = 0$  en un temps propre fini  $\tau \leq \iota_0$ .

L'équation géodésique radiale (paramétrée par le temps propre) d'un observateur de Painlevé s'obtient simplement à partir des équations différentielles<sup>13</sup>:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{r(\tau)}{r(\tau) - r_s}$$

$$\frac{dr^2}{d\tau^2} = \frac{r_s}{r(\tau)}$$

La première équation est liée à l'existence d'un vecteur de Killing de type temps (conservation de l'énergie valorisée à 1) sur une géodésique.

La deuxième résulte de la première et de la normalisation de la quadri-vitesse:  $U^\mu \cdot U_\mu = -1$

Ces relations s'intègrent:  $r(\tau) = (9 r_s / 4)^{1/3} (\tau_0 - \tau)^{2/3}$

<sup>12</sup> Notons que comme l'observateur de Painlevé part de l'infini, la valeur finie s'évalue depuis le point  $r = 0$ .

<sup>13</sup> Voir :Linet B. p. 91-93. Les coordonnées  $t, r$  sont celles de Schwarzschild.

$$t(\tau) = \tau - 3a \cdot (\tau_0 - \tau)^{(1/3)} - (3/2)a^{(3/2)} \ln\left(\frac{(\tau_0 - \tau)^{(1/3)} - \sqrt{a}}{(\tau_0 - \tau)^{(1/3)} + \sqrt{a}}\right) + t_0$$

$\tau_0$ ,  $t_0$  sont des constantes d'intégration et  $a = r_s (9r_s/4)^{-1/3}$

A partir de cette description paramétrique de la géodésique on peut calculer  $r(t)$ , pour simplifier les calculs on choisit une échelle où  $r_s = 1$ .

Après quelques calculs on obtient l'équation géodésique  $t(r)^{14}$ :

$$t = \tau_0 - (2/3)r^{(3/2)} - 2(\sqrt{r} + (1/2)\ln(\frac{\sqrt{r}-1}{\sqrt{r}+1}))$$

De la définition (3-3) de la coordonnée  $T$  pour une valeur  $T_0$  donnée, avec  $r_s = 1$ , nous tirons:

$$t = T_0 - 2(\sqrt{r} + \frac{1}{2}\log(\frac{\sqrt{r}-1}{\sqrt{r}+1}))$$

Et la relation géodésique  $t_{géo}(r)$ , en posant également  $r_s = 1$ , s'écrit <sup>15</sup>

$$t_{geo} = (-\left(\frac{2}{3}\right)r^{(\frac{3}{2})} + \tau_0) - 2(\sqrt{r} + \frac{1}{2}\log(\frac{\sqrt{r}-1}{\sqrt{r}+1}))$$

<sup>14</sup> Cette équation diverge pour  $r = r_s = 1$ . On retrouve toujours le délicat problème de la divergence de la fonction géodésique sur l'horizon et sa non définition au delà qui nécessite une discussion (utilisant le fait que la divergence d'une coordonnée non physique n'a rien de critique) pour autoriser la prolongation au delà (vers l'intérieur) de l'horizon!

<sup>15</sup> La coordonnée  $t$  de Schwarzschild est notée  $t_{géo}$ . C'est la coordonnée  $t$  relative au mouvement d'un observateur de Painlevé mesurée par un observateur statique de Schwarzschild (alors que  $T$  est une coordonnée différente).

Calculons la différence<sup>16</sup>:

$$t - t_{géo} = T_0 - [ - (2r^{3/2})/3 + \tau_0 ]$$

On voit que pour toute valeur de  $r$ , la valeur de  $t(r)$  définie par (8-8) qui tend vers l'infini pour  $r = l$  est toujours supérieure à la valeur coordonnée  $t(r)$  notée  $t_{géo}(r)$  (qui tend aussi vers l'infini) définie par (8-9) si:

$$t - t_{géo} \geq 0 \rightarrow T_0 - \{ - (2r^{3/2})/3 + \tau_0 \} \geq 0 \rightarrow T_0 > - (2r^{3/2})/3 + \tau_0$$

Pour  $0 \leq r < \infty$ , le maximum du membre de droite de l'inégalité de droite est atteint pour  $r = 0$ .

Il suffit donc que  $T_0 > \tau_0$  pour que  $T_0(r) > t_{géo}(r)$  quel que soit  $r$ .

Ceci confirme que  $t_{géo}$  de l'équation géodésique reste inférieur à  $T_0$  qui est fini.

La constante d'intégration  $\tau_0$  permet d'étiqueter l'infinité d'observateurs de Painlevé (par leur date d'arrivée ordonnée)<sup>17</sup>.

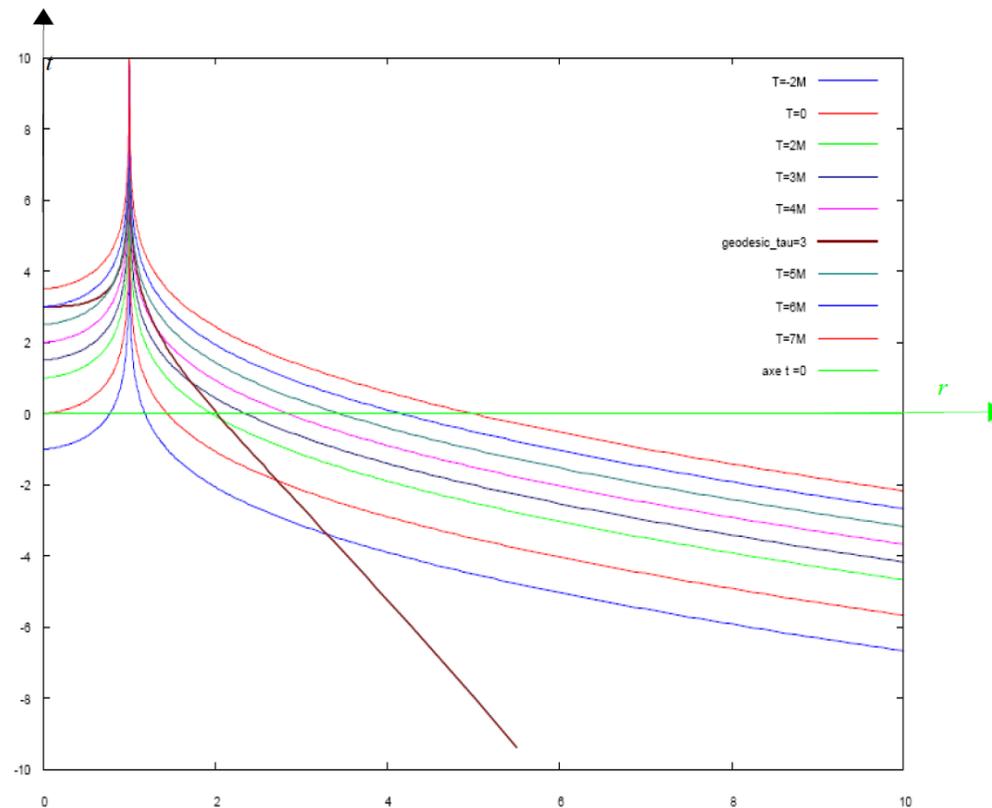
Le choix d'une origine pour la valeur de  $\tau_0$  est arbitraire.

Pour  $r = l$  (horizon) on obtient la valeur finie:  $T = - 2/3 + \tau_0$  et pour  $r = 0$  on obtient  $T = \tau_0$ .

---

<sup>16</sup> La différence de ces deux fonctions qui tendent toutes deux vers l'infini pour la même valeur de  $r$  est finie.

<sup>17</sup> Il n'est pas pratique de fixer l'origine du temps à l'origine de la géodésique d'un observateur de Painlevé puisqu'elle est à l'infini. Il est plus simple de fixer une origine du temps en un point bien défini de la géodésique, à l'arrivée au terminus, correspondant à la fin de la géodésique puisqu'elle est incomplète. Nous parlons des géodésiques radiales « entrantes » où la fonction  $\tau(r)$  est décroissante. Pour les « sortantes » ce choix serait naturel. Le point  $r = 0$ , lui même, n'appartient pas à variété décrivant l'espace temps (ouvert).



**Fig. 8-1a:** On a représenté huit courbes  $T = cste$  et une courbe géodésique pour  $\tau_0 = 3$ . On remarque que la courbe géodésique coupe orthogonalement les hypersurfaces à  $T = cste$  dans le sens croissant (avec nos conventions de géodésiques entrantes). La figure illustre comment, dans la forme de Painlevé où  $T$  est la coordonnée temps géodésique, elle reste finie quand on franchit l'horizon alors que  $t_{géo}$  diverge. Dans l'exemple représenté sur la figure 8-1a où on a posé  $\tau_0 = 3$ , à  $r = 0$ , on obtient:

$$t_{géo} \leq +7/3 \text{ pour } r = 1 \text{ et } t_{géo} \leq 3 \text{ pour } r = 0,$$

Ceci montre que la courbe  $t_{géo}(r)$  n'est jamais au dessus de la courbe  $T(r) = 6M = 3$ .

## Cône de lumière sur l'horizon dans la forme de Painlevé

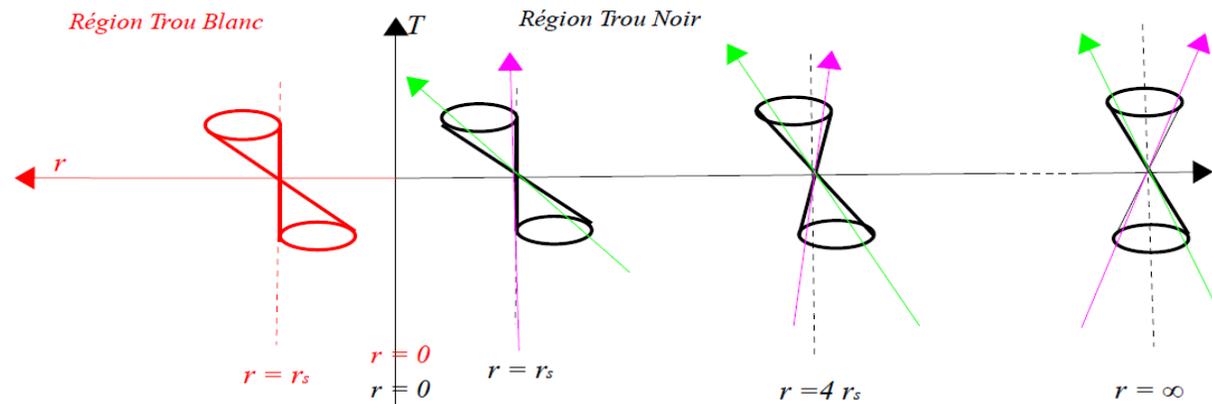
Pour la lumière, pour le trou noir, pour  $r = r_s$ , on obtient:  $2dT \cdot dr + dr^2 = 0$ , soit  $dr(dr+2dT) = 0$ ,

donc:  $\frac{dr}{dT} = 0$  et  $\frac{dr}{dT} = -2$ ,

Pour le trou blanc<sup>18</sup>:  $-2dT \cdot dr + dr^2 = 0$ , soit  $dr(dr-2dT) = 0$ ,

donc:

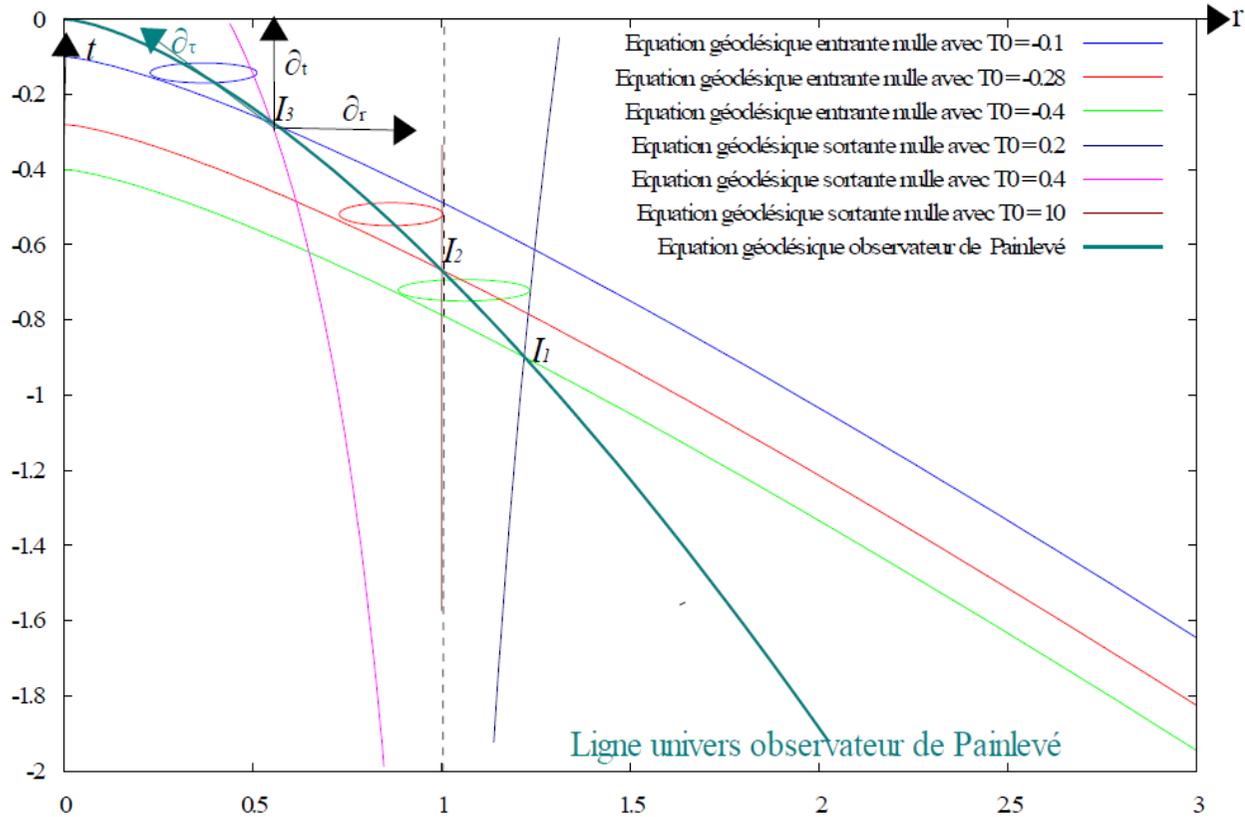
$$\frac{dr}{dT} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dr}{dT} = 2$$



**Fig 8-2** : Cône de lumière entrant et sortant sur l'horizon dans la forme de Painlevé.

<sup>18</sup> Nous avons vu qu'on peut passer du trou noir au trou blanc en changeant le signe du deuxième terme du membre de droite dans les équations (3-3-1) et (3-3-2) décrivant la transformation de coordonnées au chapitre 3.

Le diagramme (8-2) est complété par la figure ci dessous (zoom autour de  $r = r_s$ ).



**12-2**<sup>19</sup>: Les géodésiques sortantes aux points d'intersection  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  avec la géodésique entrante de Painlevé sont représentées. On voit comment le cône de lumière, représenté par les tangentes aux géodésiques nulles, bascule sur l'horizon à  $r = 1$ .

<sup>19</sup> La figure 12-2 a été tracée avec Maxima.

## Etablissement de l'équation géodésique radiale dans la forme de Painlevé:

Méthode directe

Nous avons vu l'équation géodésique radiale des observateurs de Painlevé dans la forme de Schwarzschild, intéressons nous à cette équation dans la forme de Painlevé.

Nous allons montrer que l'espace temps vu par un observateur de Painlevé est « newtonien »!

Rappelons que la quadri-vitesse exprimée dans ces coordonnées s'écrit:

$$U^\mu = U_\nu \cdot g^{\mu\nu} = \{ 1, -(r_s/r)^{1/2}, 0, 0 \}$$

Dérivons par rapport au temps. Seule la composante  $r$  de  $U^\mu$  n'est pas constante et elle ne dépend que de  $r$ . Calculons cette composante:

$$(U^\mu)' = (r')' = d(r')/d\tau = (dr'/dr)(dr/d\tau) = \{d[(r_s/r)^{1/2}]/dr\} \{dr/d\tau\} =$$
$$-1/2(r_s/r^2)(r_s/r)^{-1/2}(r_s/r)^{1/2} \rightarrow r'' = -1/2(r_s/r^2) = -Gm/r^2 \quad 20$$

Ce résultat est remarquable et montre que la physique vue par ces observateurs est pratiquement entièrement Newtonienne<sup>21</sup>.

Ce résultat s'intègre facilement et montre que, à la différence de ce qu'on obtenait dans la forme de Schwarzschild, l'équation géodésique est continue et régulière dans l'intervalle  $r = ]0, \infty]$ .

---

<sup>20</sup>  $r_s = 2Gm$ , on a posé comme d'habitude  $c = 1$ .

<sup>21</sup> Notons que la dérivation s'effectue par rapport au temps propre qui se trouve être également la coordonnée temps dans cette forme!. Démonstration à partir du résultat donné dans Doran C. (2000)

## Type des vecteurs de base dérivés des coordonnées dans la forme de Painlevé.

Pour le vecteur de base  $(\partial_t)^\mu$  temps<sup>22</sup> associé à la coordonnée  $t$ :

Sa valeur est par définition:  $(\partial_t)^\mu = (1, 0, 0, 0)$

Sa version covariante vaut:

$$(\partial_t)_\mu = g_{\mu\nu} (\partial_t)^\nu = \left( -\left(1 - \frac{2Gm}{r}\right), \sqrt{\frac{2Gm}{r}}, 0, 0 \right)$$

Le type de ce vecteur est déterminé par son auto-produit scalaire.

$$(\partial_t)^\mu (\partial_t)_\mu = (\partial_t)^0 (\partial_t)_0 = -\left(1 - \frac{2Gm}{r}\right)$$

Ce produit scalaire est:

négatif pour  $r > 2GM$ ,  $(\partial_t)^\mu$  est alors de type temps,  
nul pour  $r = 2GM$ ,  $(\partial_t)^\mu$  est de type nul,  
positif pour  $r < 2GM$ ,  $(\partial_t)^\mu$  est de type espace.

Pour les autres vecteurs de base nous ne ferons pas le calcul mais il est facile de vérifier que:

$$(\partial_r)^\mu (\partial_r)_\mu = 1$$

$$(\partial_\theta)^\mu (\partial_\theta)_\mu = r^2$$

$$(\partial_\varphi)^\mu (\partial_\varphi)_\mu = r^2 \sin^2 \theta$$

Tous ces vecteurs sont toujours positifs quelque soit  $r$ , ils sont toujours de type espace.

<sup>22</sup> Cette notation habituelle donne en fait les coordonnées du vecteur. la signature de la métrique est  $(-, +, +, +)$ .

## Condition pour qu'une trajectoire radiale soit de type temps quand $r < 2Gm$

Rappelons la forme de la métrique entrante de Painlevé.

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Gm}{r}\right) dt^2 + 2\sqrt{\frac{2Gm}{r}} dr \cdot dt + (dr^2 + r^2(\sin(\theta)^2 d\varphi^2 + d\theta^2))$$

Pour que le  $ds^2$  donné par la forme entrante de la métrique de Painlevé soit de type temps pour  $r < 2Gm$  sur une ligne d'univers radiale il faut que:

$$\left(1 - \frac{2Gm}{r}\right) dt^2 - 2\sqrt{\frac{2Gm}{r}} dr \cdot dt > 0$$

En divisant par  $dt^2$  les deux membres on obtient:

$$\left(1 - \frac{2Gm}{r}\right) - 2\sqrt{\frac{2Gm}{r}} \frac{dr}{dt} > 0$$

Soit:

$$\frac{-dr}{dt} > \frac{2Gm - r}{2\sqrt{2Gmr}}$$

**Le vecteur dérivé de la coordonnée  $t$  n'est pas orthogonal aux hypersurfaces à  $t = \text{cste}$ .**

Calculons le produit scalaire du vecteur temps  $(\partial_t)^\mu$  avec le vecteur spatial  $(\partial_r)^\mu$  qui appartient à l'hypersurface définie par  $t = \text{constante}$ .

Avec:

$$(\partial_r)^\mu = \{0, 1, 0, 0\}$$

et

$$(\partial_t)_\mu = g_{\mu\nu} (\partial_t)^\nu = \left(-\left(1 - \frac{2GM}{r}\right), \frac{(2GM)^{1/2}}{r^{1/2}}, 0, 0\right)$$

Cela s'écrit:

$$(\partial_r)^\mu (\partial_t)_\mu = (\partial_r)^I (\partial_t)_I = \sqrt{\frac{2Gm}{r}}$$

Résultat qui est toujours positif et ne tend vers zéro que pour  $r$  tendant vers l'infini comme cela était prévisible!

Donc le vecteur  $(\partial_t)^\mu$  n'est pas orthogonal aux hypersurfaces à  $t = \text{cste}$ .

Ceci explique géométriquement comment une ligne d'univers peut être de type temps dans une région où les coordonnées sont toutes de type espace (mais non orthogonales deux à deux).

## Quelle est le critère physique fondamental: Le temps, le mouvement ou la causalité?

Sous l'horizon, on peut raisonnablement se poser la question, puisque nous avons une situation où toutes les coordonnées sont de type espace mais où une ligne d'univers temporelle physique peut exister.

Comment une ligne d'univers de type temps peut exister alors qu'il n'existe pas de coordonnée de type temps: Cela n'est il pas contradictoire?

Cela est possible par l'existence du produit  $dr:dt$  dans la métrique qui comme nous l'avons indiqué implique que cette ligne d'univers soit en mouvement pour que le produit  $dr:dt$  ne soit pas nul! On voit ici qu'un mouvement<sup>23</sup> permet à un corps matériel d'exister physiquement!

En effet, une telle ligne d'univers est dans le cône de lumière, alors qu'une ligne d'univers tangent à la coordonnée  $t$  est à l'extérieur: C'est ce que montre la figure 12-2 pour le cône de lumière en  $I3$  sous l'horizon.

La ligne d'univers de l'observateur de Painlevé est à l'intérieur de tous les cônes de lumière représentés, y compris en  $I3$  sous l'horizon.

Quant à la stationnarité que peut on en dire? Il n'y a plus de coordonnée de type temps!

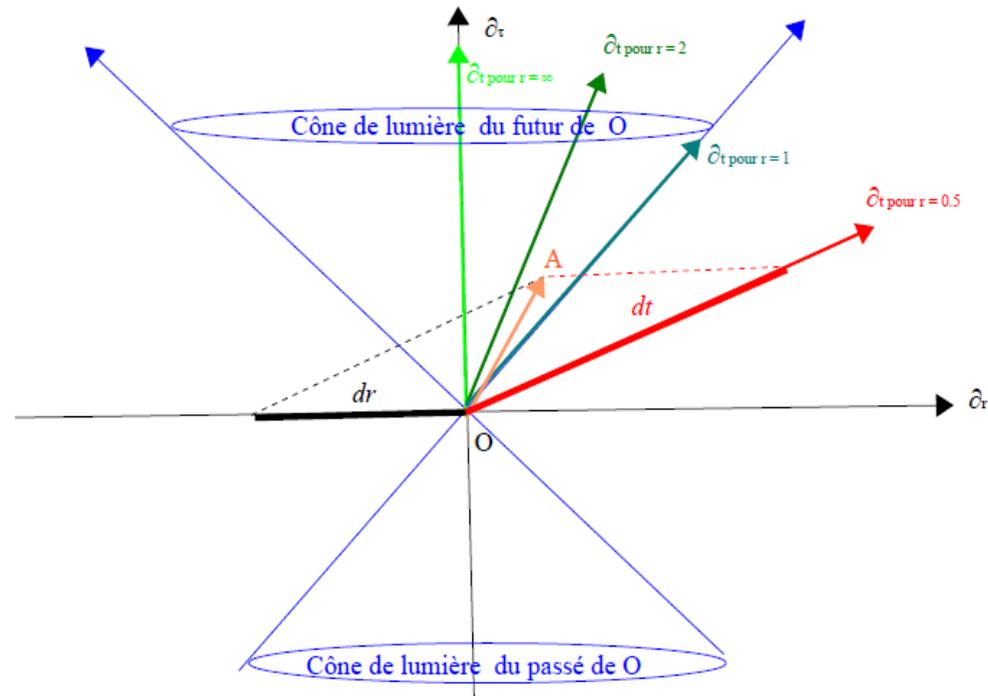
Par contre il y a possibilité de mouvement de type temps par le produit  $dr:dt$  dans la forme de la métrique.

On peut illustrer géométriquement cette possibilité, simplement en représentant les vecteurs de base  $\partial_r$  et  $\partial_t$  dans

---

<sup>23</sup> Même si ce mouvement est géodésique et par exemple co-mobile de l'effondrement de l'espace-temps, il y a dynamique car la situation de l'observateur évolue physiquement! On peut faire observer qu'à l'extérieur de l'horizon, un observateur statique peut exister. Cela montre bien que le caractère physique du temps propre de cet observateur ne saurait être attaché à l'espace temps lui-même, même si sa ligne d'univers a la même mesure que ce temps, mais à l'observateur lui-même. Ceci peut se traiter en incorporant le temps propre de cet observateur (qui n'appartient pas à l'espace temps) dans un espace local interne associé à l'opérateur. Ceci permet d'ailleurs de résoudre des paradoxes liés au cas de boucles temporelles qu'on trouve dans d'autres espaces temps.

la base  $\partial_r$  et  $\partial_\tau$  où on a tracé de surcroît le cône de lumière local permettant de caractériser les lignes d'univers de type temps.



**Fig.12-3** Diagramme schématique<sup>24</sup> représentant les vecteurs de base des coordonnées de Painlevé en fonction de  $r$  dans la base locale inertielle de Lorentz ( $\partial_r$ ,  $\partial_\tau$ ). Les vecteurs spatiaux restent colinéaires, mais on voit que le vecteur de base de la coordonnée temps  $\hat{\partial}_t$  tourne vers la droite à partir de  $r = \infty$ , par rapport au vecteur de base temps local  $\partial_\tau$ .

<sup>24</sup> C'est un schéma de principe non rigoureux (en particulier les modules des vecteurs ne sont pas corrects) mais qui représente correctement le phénomène décrit. On a utilisé la définition cartésienne du modèle de la rivière où on avait identifié des vecteurs de base spatiaux et  $\partial_t = \partial_\tau + (.2Gm/r)\partial_r$  (mais comme on est en 2D on peut poser  $x = r$ ). On a posé  $r_s = 1$ .

## L'apport de Lemaître

Indépendamment Lemaître a établi en 1932 de façon magistrale, directement à partir de équations d'Einstein, une forme générale

$$ds^2 = -a^2 d\chi^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + c^2 dt^2.$$

d'où se déclinent une forme générique pour la métrique des univers spatialement homogènes et isotropes et une forme générique de métrique dans le vide pour l'univers à symétrie sphérique (isotrope). En posant<sup>25</sup>:

$$r_0^3 = \frac{Gm}{4A^2}, \quad A^2 = \frac{\lambda c^2}{3}$$

Cette dernière s'écrit:

$$ds^2 = -A^2(r^3 + 8r_0^3) \frac{d\chi^2}{r} - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + c^2 dt^2$$

Cette forme de la métrique de Schwarzschild établie par Lemaître présente manifestement un caractère hybride (coordonnées  $t, \chi, \theta, \phi$  et une fonction  $r(\chi, t)$  de ces coordonnées).

Comme nous l'avons déjà indiqué, Lemaître peut éliminer une des variables parmi  $t, \chi$  et  $r$ . Comme  $t$  est le temps propre, il est judicieux de le conserver.

Il reste deux choix à Lemaître, utiliser  $(t, r, \theta, \phi)$  ou  $(t, \chi, \theta, \phi)$ , ce qui fait que (11) va se décliner en deux formes, toutes deux non singulières sur l'horizon.

La forme de Painlevé généralisée<sup>26</sup> (avec constante cosmologique) et une nouvelle forme originale appelée forme de Lemaître.

---

<sup>25</sup> Le paramètre  $\lambda$  est la constante cosmologique, le rayon de courbure  $R$  vaut  $(3/\lambda.)^{1/2}$ , donc  $\lambda r^2 = r^2/R^2$ .

<sup>26</sup> Lemaître ignorait que cette forme avait été proposée par Painlevé.

## La forme de la métrique de Painlevé-Lemaître

Le premier choix conduit à une forme non dynamique, en fait stationnaire, mais comme la distinction entre statique et stationnaire n'existait pas à l'époque, ceci malmène l'argument de Lemaître au sujet de la relation entre la staticité et le caractère singulier à l'horizon. Lemaître établit directement la forme que Painlevé <sup>27</sup> avait proposée en 1921:

$$ds^2 = dt^2 \left[ 1 - \frac{2m}{r} \pm \frac{\lambda r^2}{3} \right] - dr^2 \pm 2 \sqrt{\frac{2m}{r} - \frac{\lambda r^2}{3}} dr dt - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

Par la transformation: 
$$d\tau = dt + \frac{Ar[(r^3 + 8r_0^3)/r]^{1/2}}{r - A^2(r^3 + 8r_0^3)} dr$$

Lemaître montre l'équivalence de sa forme avec celle de Schwarzschild.

---

<sup>27</sup> Painlevé (1921). Lemaître l'étend au cas où  $\lambda \neq 0$ : Forme de Painlevé-Lemaître. Le signe  $\pm$  indique 2 cas: Sortant = + et entrant = -, le signe choisi est le même pour toute l'équation! Lemaître ne cite que le premier. Rappelons que le rayon de courbure  $R$  associé à la constante cosmologique  $\lambda$  vaut  $R = (3/\lambda)^{1/2}$ . Pour la solution de Schwarzschild c'est évidemment le cas du trou noir (entrant) qui est traité. On a posé  $G = 1$  et  $c = 1$ .

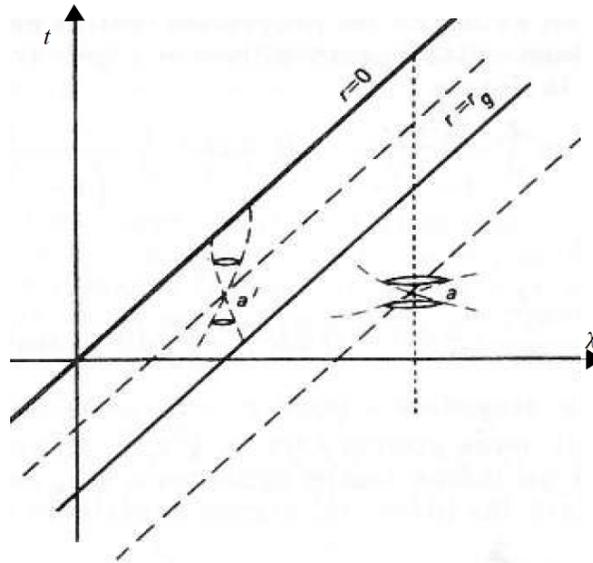
## La forme de Lemaître

En utilisant l'équation géodésique que Lemaître a établi:

$$r = \left(\frac{3}{2} \sqrt{2m} (\chi - t)\right)^{(2/3)}$$

pour remplacer  $r$  par sa valeur dans les coordonnées co-mobiles de Lemaître, on obtient la forme de Lemaître:

$$ds^2 = dt^2 - \left(\frac{4Gm}{3(t-\chi)}\right)^{(2/3)} d\chi^2 - (2Gm^{2/3}) \left(\frac{3(t-\chi)}{2}\right)^{(4/3)} (\sin(\theta)^2 d\varphi^2 + d\theta^2)$$



**Diagramme associé à la forme de Lemaître:** Les géodésiques radiales sont des droites verticales. Les courbes  $r = \text{cste}$  des droites inclinées à  $45^\circ$ . On note l'invariance par rapport à une translation à  $45^\circ$ .

## Comparaison des 3 formes pour la solution de Schwarzschild

### A- Représentation dans les coordonnées de Schwarzschild:

Une représentation graphique synthétique des différentes formes permettra de mieux comprendre la nature de l'artefact de singularité sur l'horizon dans la solution de Schwarzschild.

La représentation sur un diagramme de Minkowski en coordonnées de Painlevé montre qu'il n'y a pas de singularité pour l'observateur en chute libre radiale sans vitesse à l'infini, mais qu'effectivement un observateur extérieur à l'horizon ne voit jamais l'observateur en chute libre l'atteindre.

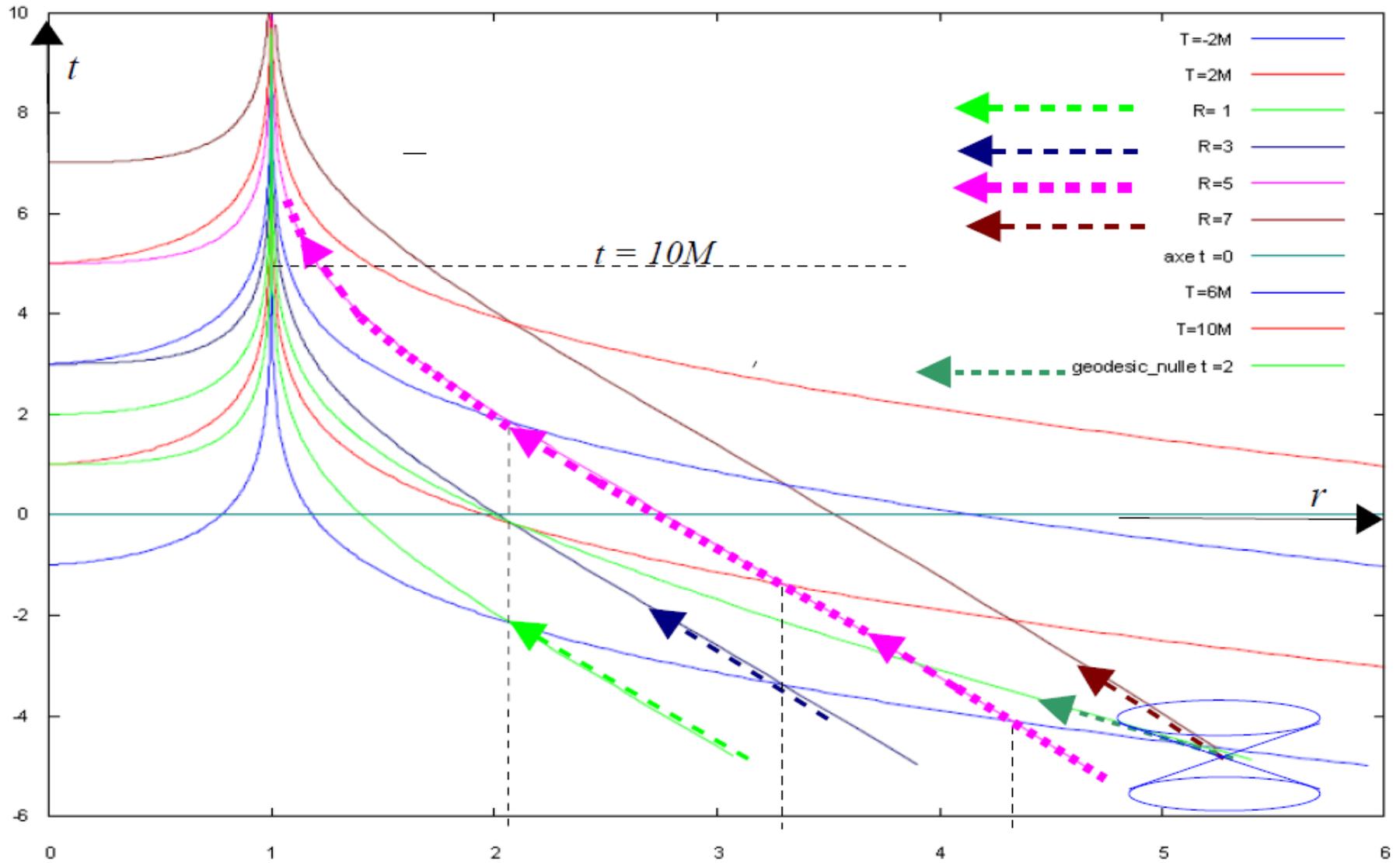
Ceci est représenté sur les **figures 14-1<sup>28</sup> à 14-4** (ci après) et complété par la figure 17-1.

Différents systèmes de coordonnées représentées dans le plan  $r, t$  (forme de Schwarzschild).

On a représenté 4 isochrones de temps propre ( $T = \tau = \text{cste}$ ) en trait fin de couleur et repérées par  $T = n.2M$  sur la légende du dessin.

---

<sup>28</sup> Diagramme réalisé avec le logiciel Maxima). Unités utilisées:  $2M = 1, G = 1, c = 1$ .



**Fig 14-1:** Représentation sur un diagramme en coordonnées de Schwarzschild.

On a représenté 4 géodésiques parcourues par les observateurs de Painlevé (ou de Lemaître) en traits fins de couleur surmontés d'une flèche en trait épais interrompu de la même couleur pour indiquer la direction.

Elles sont étiquetées, sur la légende, par la coordonnée de Lemaître  $\chi$ , égale à la constante d'intégration  $\tau_0$  de Painlevé, notée  $R$  sur la figure ( $R = 1, 3, 5, 7$ ).

La géodésique nulle<sup>29</sup>  $t = 2$  est représentée en vert (surmontées par des flèches vertes pointillées). Ceci permet de positionner cette géodésique lumière par rapport aux autres.

Un cône de lumière (en trait fin bleu) est tracé en un point ( $R = 7, T = -2M, r \approx 5.3, t \approx -4$ ) de la trajectoire<sup>30</sup> (en trait marron plein) de l'observateur de Lemaître de coordonnée  $R = 7$ .

Il montre que la trajectoire géodésique de Painlevé ( $R = 7$ ) est orthogonale à l'hypersurface à temps propre constant  $T = -2M$ , (symétrique par rapport au cône de lumière).

a) **Coordonnées de Schwarzschild** (coordonnées cartésiennes sur la figure 14-1).

L'axe de la coordonnée  $r$  ( $t = 0$ ) est représenté horizontalement.

L'axe de la coordonnée  $t$  ( $r = 0$ ) est représenté verticalement à gauche. Les isochrones  $t = cste$ <sup>31</sup> sont des droites parallèles à l'axe des  $r$ . On a tracé  $t = 10M$ .

b) **Coordonnées de Painlevé** (coordonnées mixtes)

La coordonnée spatiale  $r$  est identique à celle de Schwarzschild.

La coordonnée temporelle  $T = \tau$  est « curviligne » dans cette représentation. Elle est matérialisée par quelques courbes isochrones à  $T = cste$  (courbes à  $T = -2M, 2M, 6M, 10M$ )

c) **Coordonnées de Lemaître** (coordonnées « curvilignes »)

La coordonnée temporelle est identique à celle de  $T = \tau$  de la forme de Painlevé.

---

<sup>29</sup> La géodésique nulle radiale satisfait à l'équation  $dt/dr = \pm|1-2m/r|^{-1}$  soit  $t = -[r + 2m \ln(r-2m)] + t_0$  pour la géodésique entrante où  $t_0$  est une constante d'intégration.

<sup>30</sup> On a représenté un cône de lumière pour montrer que la trajectoire de l'observateur de Lemaître est bien à l'intérieur et qu'elle est orthogonale au sens de la RR aux hypersurfaces  $T = constante$ : symétrique par rapport à la trajectoire des photons. A l'approche de l'horizon les cônes de lumière se ferment.

<sup>31</sup> Si une telle isochrone est géométriquement bien définie, sa réalisation physique n'est pas évidente.

La coordonnée spatiale radiale  $\chi = R$  est tracée pour quelques courbes isospaciales (avec flèches) à  $\chi = R = cste$  pour  $R=1, 3, 5, 7$ , chacune correspondant à un observateur de Lemaître. Ces courbes correspondent aux géodésiques suivies par des observateurs de Painlevé/Lemaître<sup>32</sup> dans ces coordonnées de Schwarzschild.

Suivons l'évolution du temps propre  $T$ , en fonction de  $r$ , de l'observateur de Painlevé/Lemaître sur sa géodésique de coordonnée  $R = \tau_0 = 5$  (Deuxième courbe, en magenta trait épais, en partant du haut, surmontée par des flèches pointillées magenta), sur le diagramme on lit:

Pour  $r \approx 4.4$ ,  $T = -2M$ , pour  $r \approx 3.2$ ,  $T = 2M$ , pour  $r \approx 2.05$ ,  $T = 6M$ , après cela nécessiterait un zoom car cela devient illisible sur le diagramme.

En fait cette géodésique ne va jamais couper la courbe isochrone  $T = 10M$ .

Cela illustre le mouvement de l'observateur dans les coordonnées de Schwarzschild par rapport à son temps propre.

Ce diagramme illustre donc comment un observateur de Painlevé en suivant une géodésique atteint la singularité  $r = 0$  (et à fortiori l'horizon) en un temps propre fini.

La géodésique associée, bien que tendant vers l'infini pour  $r = 2M$  dans ce diagramme, reste toujours inférieure (en dessous sur le dessin, ceci pouvant être montré par le calcul, à partir des équations géodésiques, car sur la figure on ne peut que le supposer) à une isochrone de temps propre donnée.

Ce diagramme en coordonnées « cartésiennes » de Schwarzschild, éclaire le paradoxe relatif au fait que l'observateur de Painlevé atteint l'horizon en un temps propre  $\tau$  fini mais que, pour un observateur de Schwarzschild, il met un temps  $t$  infini pour atteindre l'horizon !

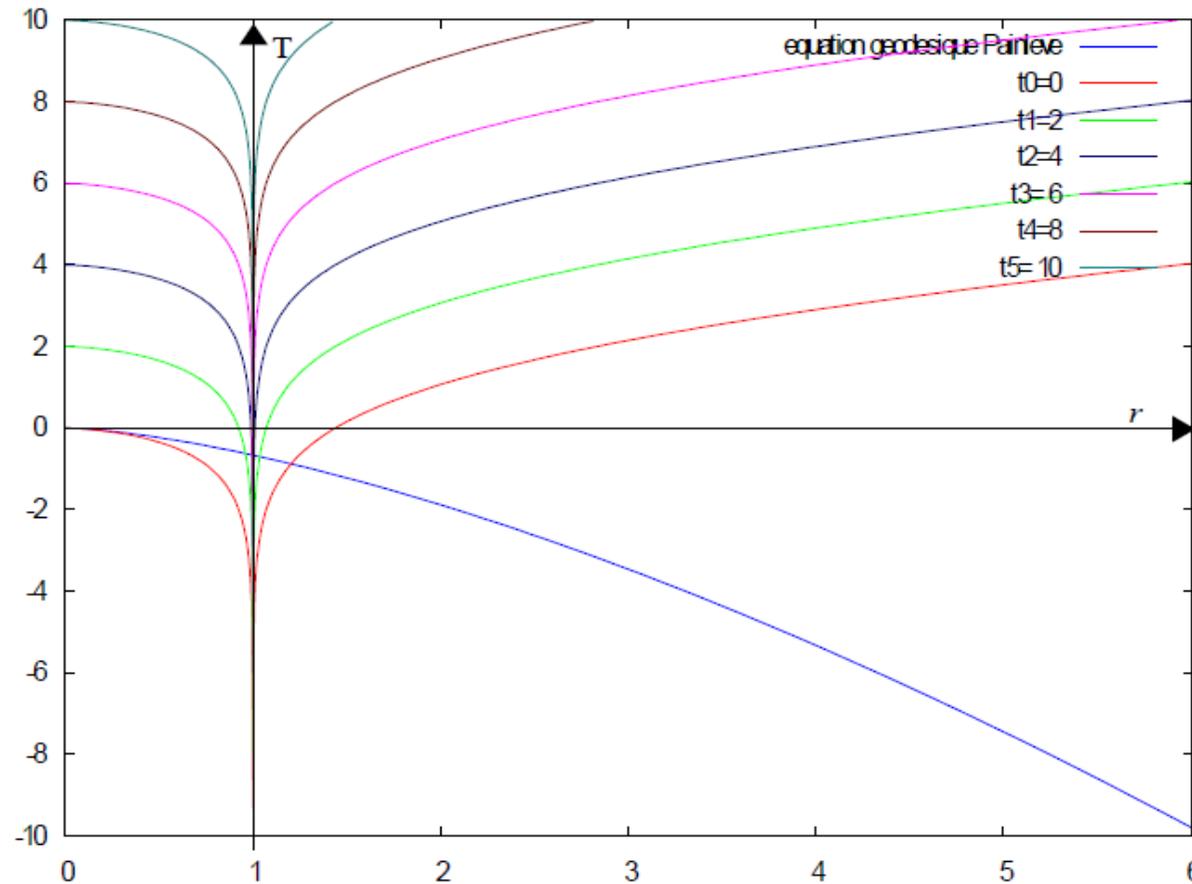
Il montre que les deux points de vue sont parfaitement compatibles: Il n'y a pas de paradoxe!

---

<sup>32</sup> C'est bien le même observateur, tous les deux sont en chute libre radiale depuis l'infini avec  $v = 0$  à  $r = \infty$ , seul l'étiquetage spatial change. Il est fixe pour Lemaître et variable pour Painlevé.

## B- Temps des observateurs de Painlevé et Schwarzschild en coordonnées de Painlevé.

Le temps  $t$  des observateurs de Schwarzschild est représenté par un réseau de courbes  $t = cste$ , sur un diagramme en coordonnées  $r, T$ . Ici nous nous plaçons du point de vue dual, celui de l'observateur de Painlevé.



**Figure 14-2**<sup>33</sup>: On voit que les isochrones du temps  $t$  d'un observateur de Schwarzschild viennent « tangenter » l'horizon en  $r = 1$ . L'isochrone  $t = +\infty$  est une droite verticale à  $r = 1$ .

<sup>33</sup> Diagramme réalisé avec le logiciel Maxima). Unités utilisées:  $2M = 1, G = 1, c = 1$

Rappelons que la réalisation physique d'une isochrone en coordonnées de Schwarzschild n'est pas évidente puisqu'il est impossible de synchroniser<sup>34</sup> les horloges associées aux observateurs statiques le long d'une géodésique radiale qui battent toutes à des rythmes tous différents du fait de l'accélération subie qui varie avec  $r$ .

Nous n'avons pas ce problème avec l'isochrone temps de Painlevé<sup>35</sup> puisque les horloges associées aux observateurs sont toutes en chute libre et battent au même rythme<sup>36</sup>.

La géodésique suivie par l'observateur de Painlevé a coupé toutes les valeurs de  $t = cste$ , y compris  $t = +\infty$ , en atteignant l'horizon<sup>37</sup>. Comme  $t = 0$  à l'arrivée sur la singularité,  $t < 0$  indique le décompte du temps propre de l'observateur de Painlevé, restant avant l'issue fatale.

Sur l'horizon, l'horloge de l'observateur de Painlevé indique  $-2/3$  alors que celle donnée par l'isochrone pour les observateurs de Schwarzschild, qui date l'évènement pour eux, vaut  $+\infty$ .

On voit comment la coordonnée  $t$  diverge par rapport à  $T$  quand on atteint l'horizon.

En fait cette propriété s'étend à tout observateur statique à l'extérieur de l'horizon puisque dans ce cas son temps propre est du type  $f(r).t$  avec  $f(r)$  fini.

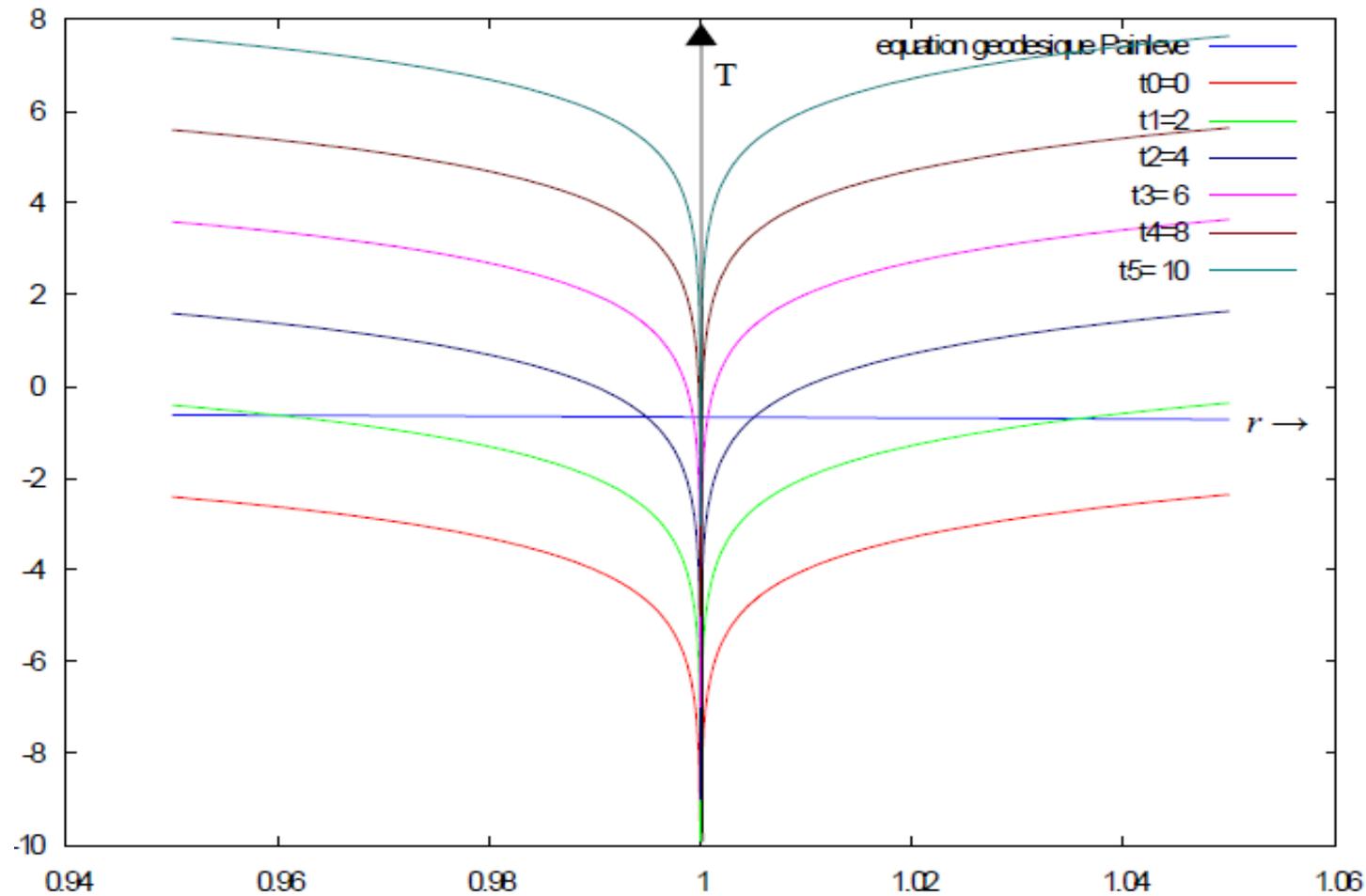
---

<sup>34</sup> Du moins par la méthode classique des signaux lumineux aller retour. Il existe d'autres méthodes car la solution étant statique c'est formellement possible. Voir Landau Lifchitz 1994, §97. Par exemple, on peut "compenser" de façon connue et constante la différence de rythme des horloges aux différents points de la radiale. L'horloge d'un observateur particulier étant déclaré maître elle peut envoyer des signaux de synchronisation à intervalle régulier permettant à chacun de calculer le facteur correctif à appliquer à sa propre horloge. La synchronisation initiale peut être réalisée par la méthode des aller-retour de signaux. Elle peut ensuite être conservée en appliquant le facteur correctif local. Mais ce n'est pas très pratique....

<sup>35</sup> Ceci confirme, une fois de plus, que la forme de Painlevé qui correspond à une meilleure description physique de l'espace temps que celle d Schwarzschild. Voir la méthode de Gautreau Hoffmann pour une réalisation.

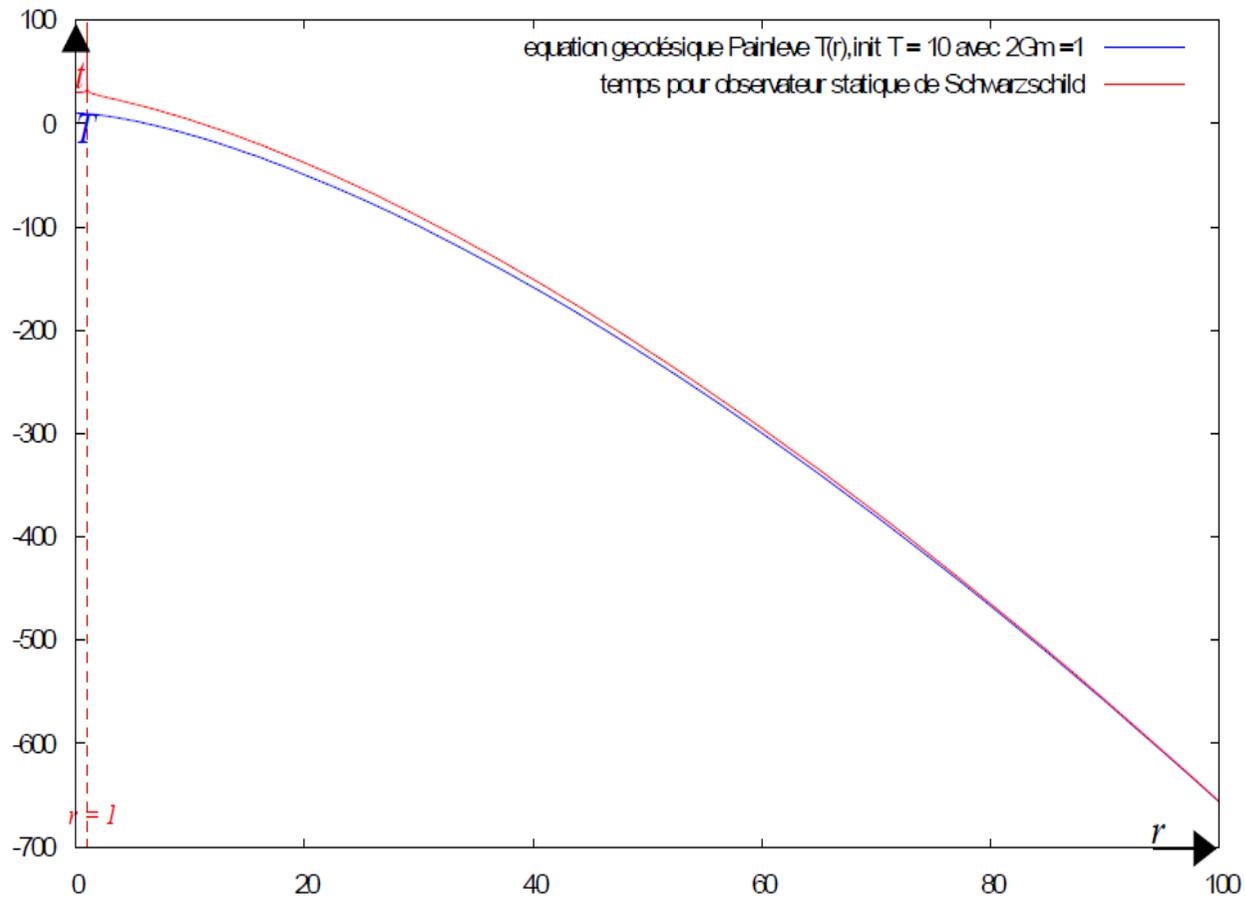
<sup>36</sup> Nous verrons que c'est une des raisons qui fait prononcer à Painlevé ses propos si contestés.

<sup>37</sup> Pour la réalisation physique des isochrones voir commentaires précédents.



**Figure 14-3**<sup>38</sup>: Zoom autour de l'horizon de la figure 14-2, (équation géodésique en bleu, avec flèches). Autre point de vue ci dessous.

<sup>38</sup> Diagramme réalisé avec le logiciel Maxima). Unités utilisées:  $2M = 1, G = 1, c = 1$

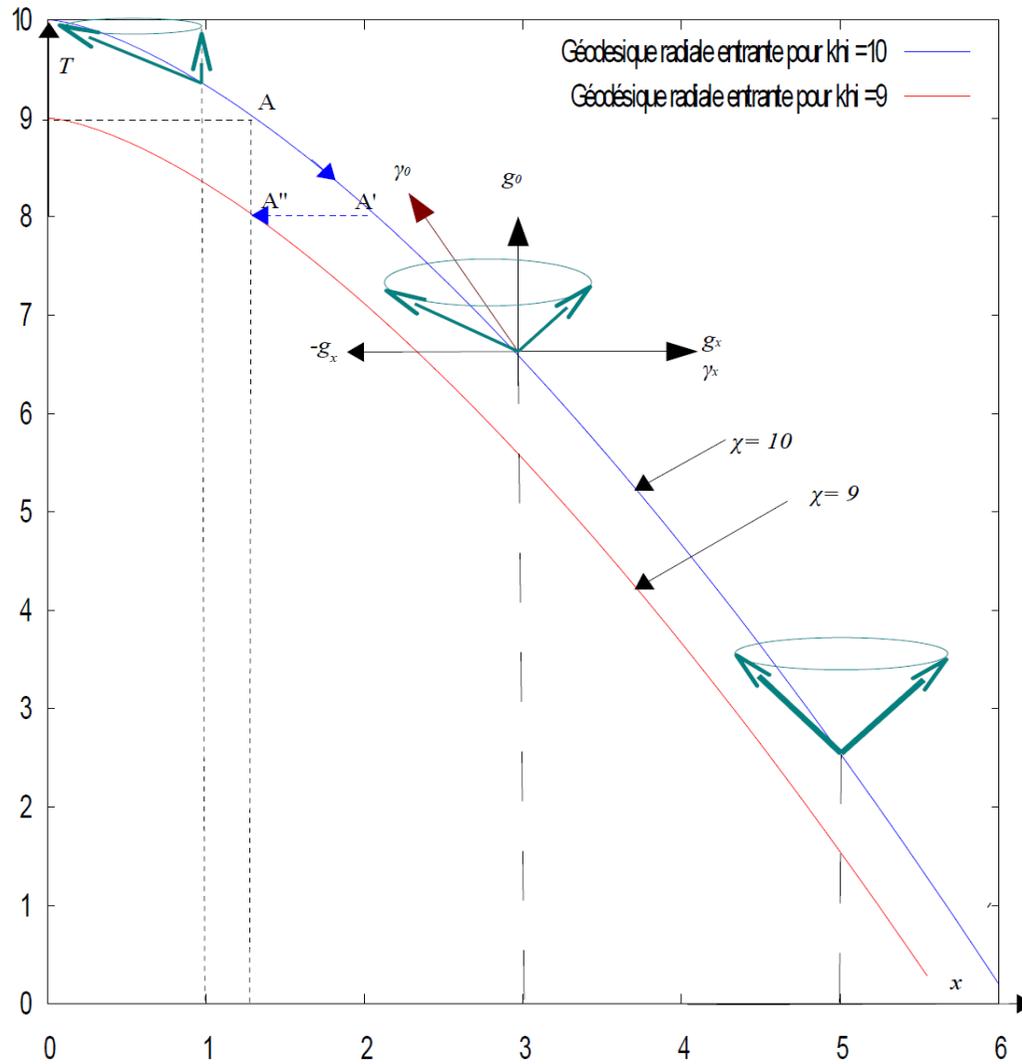


**Figure 14-4**<sup>39</sup>: Comparatif entre le temps chute libre  $T(r)$  écoulé mesuré par un observateur de Painlevé et le temps écoulé  $t(r)$  mesuré par un observateur de Schwarzschild depuis un point de rencontre lointain<sup>40</sup> ( $r = 100$ ).

Notons la divergence de  $t(r)$  pour  $r = 1$  et que  $t(r) > T$ .

<sup>39</sup> Diagramme réalisé avec le logiciel Maxima. Unités utilisées:  $2M = 1, G = 1, c = 1$

<sup>40</sup> Où ils se sont synchronisés. Sur la figure, nous trichons un peu (la convergence devrait se faire à l'infini).



**Figure 17-1:** Représentation<sup>324</sup> de l'équation géodésique :  $\tau = T = -(2/3)x^{3/2} + \chi$ , pour 2 valeurs de  $\chi$ . Pour  $\chi = 10$ , en  $x = 3$ ,  $T \approx 6.5$ , on a représenté le vecteur de base  $g_x$ , flèche horizontale en noir, (et donc aussi  $\gamma_x$ , puisqu'ils sont égaux), le vecteur de base  $g_0$ , flèche verticale en noir, le vecteur de base  $\gamma_0$ , flèche marron tangente à la géodésique et le cône de lumière en vert turquoise (on note sa dissymétrie en ce point, qui s'accroît quand  $x$  décroît, voir cône sur l'horizon à  $x = 1$ ). Notons que d'après l'équation (15) du chapitre (13), les courbes géodésiques correspondent à  $\chi = \text{constante}$ ,  $\chi$  étant la coordonnée spatiale de Lemaitre.