PROPOSITIONS DE H. WEYL ET E. CARTAN POUR LA GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE DANS LE DÉBUT DES ANNÉES 1920

ERHARD SCHOLZ †

† scholz@math.uni-wuppertal.de, Université de Wuppertal, Département C, mathématiques et sciences naturelles, et Centre interdisciplinaire d'études des sciences et de la technologie. Date : 07. 04. 2010.

RÉSUMÉ : Dès le début de la relativité générale Elie Cartan et Hermann Weyl se sont demandé comment le rôle des groupes de transformations pourrait être transféré de la géométrie classique (programme d'Erlangen) à la géométrie différentielle. Ils avaient différents points de départ et ont utilisé des techniques différentes, mais tous les deux ont généralisé le concept de connexion, résultant de l'interprétation de Levi-Civita des symboles de Christoffel classiques, comme caractérisant le transport parallèle dans des espaces courbes. Leurs objectifs différaient : Cartan a développé ses travaux dans un cadre beaucoup plus général (espaces non holonomes) que Weyl (géométrie avec jauge). Mais il y avait aussi un chevauchement des sujets (problème de l'espace) et, à la fin des années 1930, ils sont arrivés à s'accorder sur la façon de traiter les structures géométriques infinitésimales selon la méthode de Cartan.

1. INTRODUCTION[1]

La théorie d'Einstein de la relativité générale a suscité une multitude d'idées nouvelles en géométrie différentielle. En 1917, Levi-Civita a découvert que l'interprétation des symboles de Christoffel par Einstein, en géométrie riemannienne, comme les composantes du champ gravitationnel pourrait donner un sens géométrique au concept de déplacement parallèle. Ce fut le point de départ d'une investigation de toute une gamme de structures différentielles généralisées géométriques. J.A. Schouten et son élève D. Struik ont étudié les méthodes symboliques pour établir un « calcul absolu » à Amsterdam. À Zurich, H. Weyl a établi le concept généralisé de connexion affine, qui n'est plus nécessairement dérivée d'une métrique riemannienne et a généralisé le concept de structure métrique par l'idée d'une métrique avec jauge (fonction d'échelle locale) et d'une connexion d'échelle non intégrable. A. Eddington a étudié les connexions affines et linéaires à Cambridge. À Paris, E. Cartan a commencé son programme d'application des préceptes de la géométrie classique de Klein à la géométrie différentielle, et à Princeton le groupe de O. Veblen, L.P. Eisenhart et T.Y. Thomas a étudié les structures projectives en géométrie différentielle. La plupart de ces programmes de recherche géométriques étaient étroitement liés à des tentatives de création d'une théorie du champ unifié de la matière, des interactions et la géométrie[2].

1 Première publication *Boletim da Sociedada Portuguesa de Matemática* (Numéro spécial de Proceedings of Mathematical Relativity in Lisbon., International Conference in honour of Aureliano de Mira Fernandes (1884-1958). Traduit et republié avec la permission des ayants droit..

La recrudescence de ces nouvelles idées a fait des années 1920/30s un moment heureux pour la géométrie différentielle. Dans cette contribution, nous examinons les propositions de H. Weyl et E. Cartan dans les années 1920. La question de savoir comment le point de vue kleinien des groupes de transformation pouvait être importé dans la géométrie différentielle a joué un rôle crucial pour chacun d'eux. Ils ont donné des réponses différentes, mais avec un certain chevauchement. Ce n'est qu'après de nouvelles mesures de généralisations que leurs points de vue ont pu être intégrés dans un cadre encore plus large, celui des connexions dans les fibrés principaux. Ceci a été réalisé dans la seconde moitié du siècle, avec C. Ehresmann comme l'un des principaux acteurs. Ceci ne sera pas discuté ici, où nous nous concentrons sur les points de vue respectifs de Weyl et de Cartan dans les années 1920.

2. WEYL

Publications de 1918 de Weyl et « Raum-Zeit- Materie ».

En avril 1918, A. Einstein présenta l'article de Weyl *Gravitation et électricité* (Gravitation und Elektizität) (Weyl 1918a), à l'Académie des Sciences de Berlin. Il ajouta dans un court commentaire critique pourquoi il doutait de la fiabilité de l'interprétation physique donné par Weyl. Le document, comme ingrédient essentiel, contenait une généralisation de la géométrie riemannienne par l'adjonction d'une *connexion de longueur* (jauge d'échelle) exprimée par une forme différentielle $\varphi = \sum_i \varphi_i \, dx^i$. Weyl qui voulait identifier la connexion d'échelle avec le potentiel du champ électromagnétique, construisit la première théorie unifiée géométrique (TUC) de la gravitation et de l'électromagnétisme sur cette idée (Vizgin 1994, O'Raifeartaigh 1997). L'unification repose essentiellement sur la propriété que φ est un *champ de jauge*. Cette idée s'est avérée être importante et hautement pérenne, bien qu'avec quelques ajustements par rapport sa forme originale. Quelques semaines plus tard, un deuxième article de Weyl suivit dans « *Mathematische Zeitschrift* » (Weyl 1918b). Il y présenta le même sujet à un public mathématique en mettant la métrique weylienne dans la perspective d'une vision plus large de la géométrie différentielle. Dans ce document, Weyl généralisa l'idée de déplacement parallèle dans une variété riemannienne de Levi-Civita à celle d'une *connexion affine* $\Gamma = (\Gamma^i_{jk})$ (logiquement) indépendamment de toute mesure.

Le manuscrit du premier livre de Weyl sur la physique mathématique, *Espace - Temps - Matière* (ETM), (Raum - Zeit - Materie), remis à la maison d'édition (Springer) à Pâques en 1918, ne contenait pas cette nouvelle géométrie de Weyl et sa proposition pour une théorie unifiée des champs (TUC). Il l'avait été réalisé à partir des notes de cours d'un cours donné à l'été 1917 à l'Institut polytechnique (ETH) de Zurich. Weyl n'introduisit ses récentes découvertes qu'à partir de la 3e édition (1919) du livre. Les versions française et anglaise (Weyl 1922b, Weyl 1922a), traduites de la quatrième édition révisée (1921) contiennent un

2 En conséquence beaucoup de la littérature historique est orientée vers la théorie du champ unifié de l'histoire (Vizgin 1994, Goenner 2004, Goldstein 2003), d'autres cherchent du côté de la géométrie. (Reich 1992, Gray, 1999, Bourguignon 1992, Scholz 1999, Chorlay 2009).

bref exposé de la métrique généralisée de Weyl et de l'idée d'une théorie de jauge d'échelle de l'électromagnétisme. E. Cartan les lut et s'y référa immédiatement.

Les idées de base de Weyl pour la généralisation des métriques riemanniennes dans ses articles de 1918 et dans ETM (3e édition ff.) peuvent se résumer comme suit :

> (1) Généraliser le concept de déplacement parallèle, pour les variétés riemanniennes, de Levi-Civita à un type abstrait de « déplacement parallèle », sans liens a priori avec une structure métrique, $\Gamma = (\Gamma^i_{jk})$, appelée *connexion affine* (qui, sera plus tard, formulé selon les termes de Cartan : *connexion linéaire sans torsion*).
>
> (2) Construire la géométrie du point de vue purement infinitésimal (« locale » dans le langage moderne des physiciens, c'est-à-dire, en utilisant essentiellement la structure de l'espace tangent de la variété), avec des *similitudes* comme transformations de base de la structure de l'espace, car aucune unité naturelle ne s'impose *a priori* dans la géométrie.
>
> (3) La possibilité de comparer directement les quantités métriques (observables physiques) en différents points de l'espace-temps de la variété doit être considéré comme un *défaut de la géométrie riemannienne* qui est dû à son origine historique dans la théorie des surfaces de Gauss. Cela présupposerait une sorte de « distance géométrique » ce qui est contraire à la physique des champs moderne.

Selon Weyl il devrait être possible de choisir une *échelle* (Maßstab) librement et indépendamment en chaque point de l'espace-temps ; autrement dit une *jauge* pour la variété. Alors, on arrive à une métrique riemannienne (ou lorentzienne etc.) $g := (g_{\mu\nu})$ avec l'élément linéaire quadratique

$$ds^2 = \sum g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$$

Appelons cela la *composante riemannienne* d'une *métrique weylienne* (qui comporte en plus une jauge). La comparaison de quantités (observables) en différents points n'était alors possible que par l'intégration d'une *longueur* ou *connexion d'échelle*, donnée par une 1-forme différentielle,

$$\varphi = (\varphi_\mu) \qquad \varphi = \sum \varphi_\mu dx^\mu \qquad \rightarrow \qquad \text{abrégé} \quad \varphi = \varphi_\mu dx^\mu$$

qui exprime la variation infinitésimale des étalons de mesure (par rapport à la jauge). Les deux composants (g, φ) spécifient la métrique dans la jauge choisie.

Pour assurer la cohérence, un choix différent de l'échelle $\breve{g} = \Omega^2 g$ doit être accompagné de la transformation

$$\tilde{\varphi} = \varphi - d(\log \Omega) = \varphi - \frac{d\Omega}{\Omega}, \qquad (1)$$

une transformation de jauge (*Eichtransformation*) dans le sens littéral du mot. À la fin de 1918, ce mot est apparu dans la correspondance avec Einstein (Einstein 1987ff, VIII, 661), peut-être après leur discussion dans les mois qui ont précédé. En 1919, Weyl a commencé à l'utiliser dans ses publications.

En modernisant un peu la langue, nous pouvons considérer une *métrique de Weyl* $[(g, \varphi)]$ comme étant définie par une classe d'équivalence de paires (g, φ). L'équivalence est donnée par les transformations de jauge.

Avec cette généralisation de la géométrie riemannienne, Weyl s'est intéressé aux descriptions covariantes de jauge de propriétés et en particulier à celles des objets *invariants de jauge* dont la *courbure d'échelle* (courbure de la connexion d'échelle) $f := d\varphi$ fut la première détectée. Il constata qu'une métrique weylienne détermine une connexion affine compatible unique, la connexion de Weyl- Levi-Civita $\Gamma = \Gamma\,(g, \varphi)$ dépendant de la jauge d'échelle. Elle conduit aux courbures *invariantes* d'échelle de Riemann et de Ricci, *Riem, Ric* et aux géodésiques invariantes d'échelle. Une métrique de Weyl s'est avérée être réductible à une métrique riemannienne, si et seulement si $f = d\varphi = 0$ (géométrie de Weyl intégrable). Enfin, Weyl dériva un tenseur $C = (C_{ijkl})$ ne dépendant que de la classe conforme $[g]$ de la métrique, avec $C = 0$ comme condition nécessaire de courbure nulle conforme (mais condition non suffisante) si $dim\ M = n > 3$. Plus tard, cela a été appelé courbure conforme ou tenseur de Weyl (1918b Weyl, 21).

Comme déjà mentionné, Weyl identifia originellement la connexion d'échelle φ avec le potentiel du champ électromagnétique (em). Cela a conduit à une théorie de *champs de jauge* pour l'électromagnétisme avec le groupe ($^{+}$, .). Il a donc pensé que sa métrique $[(g, \varphi)]$ était en mesure d'unifier la gravitation et l'interaction électromagnétique. Dans ce cadre, la théorie de Mie-Hilbert de la matière, avec son lagrangien combiné de la gravité et de l'électromagnétisme, peut être placé dans un cadre géométrique unifié. Weyl a espéré pendant environ deux ans, que cela conduirait à exprimer, sous forme de théorie des champs, une théorie dynamique de la matière.

Einstein, ne croyait pas au caractère physique de la nouvelle théorie de Weyl, même s'il en admirait, le formalisme mathématique. Il a salué la « magnifique conséquence (wunderbare Geschlossenheit) » de la pensée de Weyl "... mais pas son accord avec la réalité ...» (italiques ajoutées par ES) (Einstein 1987ff., Vol. VIII, lettre 499). Pour Einstein, la dépendance du trajet de la fonction de transfert d'échelle des unités de mesure

(2) $\lambda\ (p_0, p_1) = exp\ [\ \int_0^1 \varphi\ (\gamma')\ ]d\tau$ γ est le chemin de p_0 à p_1

lui semblait hautement problématique. À son avis, aucune fréquence stable des horloges atomiques ne pouvait être escomptée en théorie de Weyl. Mais Weyl n'était pas convaincu. Il répliqua par l'hypothèse qu'il semble y avoir une jauge naturelle pour les horloges atomiques parce qu'elles s'adaptent à la constellation du champ local de courbure scalaire (jauge de Weyl).

D'autres physiciens, parmi lesquels A. Sommerfeld, W. Pauli, et A. Edddington, ont réagi différemment et dans un premier temps de manière positive. Mais après une période de réexamen ils ont également adopté une position plus critique. Cela ne sera pas sans influence sur Weyl. En particulier la critique de Pauli, formulée dans son article sur la relativité générale dans « *Enzyklopädie Mathematischer Wissenschaften* » (Pauli 1921), dont Weyl avait déjà pris connaissance via son projet en été 1920, et pendant les discussions à Bad Nauheim en septembre de la même année, a influencé la position de Weyl.

À la fin des années 1920 Weyl cessa de défendre son programme, fondé sur ce champ, d'interprétation purement théorique de la matière et relativisa le rôle de sa théorie du champ unifié. Mais il ne renonça pas à son programme de *géométrie purement infinitésimale*.

Que restait-il ?

Les idées de Weyl contenaient deux germes de représentation dont l'importance allait se développer au cours du temps.

- L'élargissement du groupe des automorphismes de la géométrie différentielle classique par le groupe de jauge d'échelle a entraîné un *nouveau principe d'invariance*. Weyl l'a identifié comme « la loi de la conservation de l'électricité » (Weyl 1918a, 38).

- De plus, la géométrie de jauge d'échelle était conceptuellement fondamentale et structurellement bien fondée. Weyl a montré cela dans une étude qu'il a appelé *l'analyse du problème de l'espace* (APDE)

Le premier point a été identifié plus tard comme un cas particulier des théorèmes de E. Noether -(Noether 1918)[3].

3 L'article de Noether *Invariante Variationsproblem* fut présenté le 26-07-1918 à l'Académie de Sciences de Göttingen par F. Klein ; La version finale a été publiée en septembre 1918. Weyl ne pouvait pas les connaître lors de ses publications (Weyl 1918a, Weyl 1918b). Il s'est référé aux considérations variationnelles de Hilbert, Lorentz, Einstein, Klein et de lui-même. Ceci perdura, dans ses publications ultérieures (Kosman-Schwarzbach 2011, Rowe 1999).

Avec la généralisation de Yang / Mills et Utiyama, cela est devenu un élément structurel important de la théorie de jauge non-abélienne dans la seconde moitié du siècle. En ce qui concerne le deuxième point, Weyl a pris les thèmes de la discussion du 19$^{\text{ième}}$ siècle du problème de l'espace dans l'esprit de Helmholtz-Lie-Klein et adapté le mode de questionnement à la constellation de géométries théoriques des champs suite à l'émergence de la RG (Théorie de la relativité générale). Cela rend l'entreprise de Weyl compatible avec le programme plus large d'Élie Cartan d'une mise en œuvre infinitésimale du point de vue kleinien.

Analyse du problème de l'espace (APDE).

Entre 1921 et 1923, Weyl a cherché à approfondir les fondements conceptuels de sa géométrie purement infinitésimale dans une variété M (le « support extensif du monde extérieur ») comme une caractérisation, *a priori,* des « possibles natures de l'espace ». Dans une allusion claire à la distinction kantienne des différents types de déclarations *a priori*, Weyl distingue une partie « analytique » et une partie « synthétique » dans son investigation. Dans la première étape, Weyl a analysé ce qu'il considérait comme les caractéristiques nécessaires d'un transfert pertinent des considérations de congruence vers la géométrie purement infinitésimale. Dans la deuxième étape, il a enrichi les propriétés de la structure résultante par des postulats qu'il considérait comme fondamentaux pour une théorie cohérente géométrique.

Son idée de base était qu'un groupe de « rotations » généralisées, un sous-groupe de Lie (connecté) $G \subset SL_n$ devait être considéré de façon similaire à celle de la géométrie kleinienne. Dans le nouveau cadre de la géométrie purement infinitésimale, le groupe ne pouvait plus être supposé opérer sur la variété M elle-même, mais seulement localement avec une portée « infinitésimale ». Dans une terminologie légèrement modernisée, G opère séparément sur tous les espaces tangents M.

CARACTÉRISTIQUES CONCEPTUELLES NÉCESSAIRES (« partie analytique » de APDE):

• À chaque point $p \in M,$ des congruences ponctuelles (« rotations ») $G_p \subset SL_n$ sont données dans un voisinage infinitésimal du point (dans T_pM). Tous les G_p sont isomorphes à un certain $G \subset Sl_n$.

• Les G_p diffèrent par des conjugaisons point à point

$$G_p = h^{-1}_p \, G h_p,$$

où h_p réside dans le normalisateur $\breve{G}$ de G et dépend du point p. Weyl a appelé $\breve{G}$ le « groupe des similitudes » de G.

Le (groupe) G_p permet de parler de congruences ponctuelles (« rotations ») à l'intérieur de chaque voisinage infinitésimal T_pM seulement. Afin de permettre une « comparaison métrique » entre deux voisinages de p et p', même pour des points p et p' infiniment proches, un autre gadget est nécessaire. Weyl a fait valoir que la possibilité conceptuelle la plus générale pour une telle comparaison a été donnée par une connexion linéaire.

- En plus de G_p, une connexion linéaire $\Lambda = (\Lambda^i_{jk})$ est donnée (en général avec torsion selon la terminologie que Cartan utilisera plus tard). Weyl a appelé Λ, *transfert congruent infinitésimal*, ou plus simplement une connexion métrique (généralisée).

Un transfert congruent infinitésimal n'est pas nécessairement « parallèle ». Ainsi, une connexion affine Γ (sans torsion)[4] a continué à jouer un rôle différent de celui d'une connexion métrique générale. De plus, deux connexions (Λ^i_{jk}) et $(\Lambda'^{\,i}_{jk})$ peuvent caractériser la même structure congruente infinitésimale. C'est le cas, si elles diffèrent par des « rotations infinitésimales » (qui dépendent du point) dans le groupe de Lie de G. En langage moderne ceci signifie :

(3) $\Lambda \sim \Lambda' \Leftarrow\Rightarrow \Lambda - \Lambda' = A,$ A = forme différentielle à valeurs dans $\mathbf{g}$ = Lie G.

Rotations infinitésimales dans le voisinage et connexion métrique étaient, selon Weyl, les conditions minimales nécessaires pour parler de géométrie infinitésimale dans un sens métrique (généralisée). Il ne considère pas encore ces conditions comme suffisantes, mais il établit deux postulats supplémentaires.

CARACTÉRISTIQUES CONCEPTUELLES COMPLÉMENTAIRES (« partie synthétique de APDE) :

Pour qu'une structure congruente infinitésimale dans le sens des postulats analytiques puisse caractériser la « nature de l'espace » Weyl a postulé que les conditions suivantes doivent être remplies.

- *Principe de liberté* : (Dans un sens spécifié, que nous n'analyserons pas ici) G permet la « plus large gamme concevables de transferts congruents possibles » en un point.

Avec ce postulat, Weyl a voulu établir un analogue géométrique infinitésimal au postulat de Helmholtz de libre mobilité de l'analyse classique de l'espace. Bien sûr, il doit être formulé d'une manière complètement différente. Weyl fait valoir que la gamme de possibilités la « plus large concevable » pour les transferts de congruence doit être offerte par la structure géométrique, afin de ne pas imposer de restrictions sur la distribution et le mouvement de la matière. À la place de la libre mobilité des corps rigides, Weyl émet l'idée d'une distribution de matière libre de toute contrainte de l'espace.

4 Weyl continue à appeler Γ « transfert parallèle », pour la distinguer du transfert « métrique ».

La gamme la plus large possible pour le transfert congruent donné, Weyl exige du groupe G de respecter une certaine cohérence de la structure géométrique infinitésimale. Pour lui, une telle condition de cohérence s'exprime, le mieux par l'existence d'une connexion affine unique déterminée parmi toutes les connexions métriques qui pourraient être générés à partir de l'une d'entre elles par des rotations infinitésimales arbitraires en chaque point (cf. équation. (3)).

- *Principe de cohérence* : Pour chaque transfert congruent $\Lambda = (\Lambda^i{}_{jk})$, il existe *exactement une connexion affine équivalente*.

Dans ses conférences à Barcelone (Weyl 1923) Weyl a donné un argument intéressant par analogie à la constitution d'un « état » dans lequel un postulat de liberté (pour les citoyens, plutôt que de la matière en général) est combiné avec un postulat de la cohérence. Il escompte de la constitution d'une république libérale que la libre activité des citoyens ne soit limitée que par la contrainte qu'elle ne soit pas contradictoire avec le « bien-être général » de la communauté (« l'état »). Ainsi, Weyl voit une analogie structurelle entre la constitution d'un état libéral et la « nature de l'espace » et l'utilise pour motiver le choix des postulats de la partie « synthétique » de son analyse de l'espace.

Après une traduction des postulats géométriques en conditions pour l'algèbre de Lie des groupes utilisables comme « rotations » d'une géométrie congruente infinitésimale dans le sens de APDE (parties analytique et synthétique) Weyl s'attache, par une argumentation, au cas par cas, pour un cas invoqué, à prouver ce qui suit

Théorème : Les seuls groupes qui remplissent les conditions pour les groupes de « rotation » dans APDE (parties analytique et synthétique) sont les groupes spéciaux orthogonaux de signature quelconque, $G \quad SO(p, q)$ avec les « similitudes » $\breve{G} \quad SO(p, q) \times \quad ^{+}$.

C'était un résultat agréable pour la généralisation par Weyl de la métrique de Riemann. Il indiquait que la structure de la géométrie de Weyl n'était pas qu'une des nombreuses généralisations plus ou moins arbitraires de la géométrie riemannienne, mais était d'une importance conceptuelle fondamentale.[5] Notons que, dans le langage moderne, les « similitudes » $\breve{G}$, c'est-à-dire le normalisateur dans $GL(n)$ des « congruences » G joue le rôle d'un groupe de structure, et non pas les « rotations » elles-mêmes. Weyl a plutôt mis en place une extension (normale) du groupe des congruences qui donne le groupe de structure de sa géométrie infinitésimale « métrique » généralisée. Cela ouvrait la voie à la structure de jauge caractéristique de son approche.

---

5 Dans ce sens, l'analyse du problème de l'espace peut aussi être lu comme une réponse tardive à une autre des objections d'Einstein à l'acceptation de la géométrie de Weyl comme base conceptuelle de la théorie de la gravitation. Pourquoi pas un « Weyl II » qui propose de faire dépendre la mesure d'un angle mesure du choix des unités locales ? (Einstein 1987ff., VIII, 777).

Par conséquent, dans l'édition 4 de ETM, Weyl a fièrement déclaré que l'analyse du problème de l'espace devait être considérée comme « ... un bon exemple de l'analyse essentielle [Wesensanalyse] inspiré par la philosophie phénoménologique (Husserl), un exemple qui est typique pour les cas où une essence non immanente est traitée ». (Weyl 1922 b), traduction de (Ryckman 2005, 157).

Weyl et la structure conforme et projective en 1921.

Peu de temps après être arrivé au théorème principal de APDE, Weyl a écrit un court article sur « la position du point de vue projectif et conforme » dans la géométrie infinitésimale (Weyl, 1921). Cela a été déclenché par un document de Schouten qu'il devait examiner pour F. Klein. Dans cet article Weyl étudie des classes de connexions affines de mêmes géodésiques. Celles-ci définissent une structure projective ("projektive Beschaffenheit") sur une variété différentiable. Weyl a dérivé un invariant de la structure projective du chemin, le tenseur de courbure projective Π de M. Dans une variété projectivement plate, Π était nul. Dans ce cas, il est localement isomorphe à un espace linéaire projectif.

En outre, Weyl a trouvé une relation très intéressante entre la géométrie différentielle respectivement conforme et projective et une métrique Weylienne.

Théorème : Si deux variétés weyliennes $(M, [(g, \varphi)]), (M', [(g', \varphi')])$ ont des courbures conformes identiques, $C = C'$, et des courbures projective identiques, $\Pi = \Pi'$, alors elles sont localement isométriques au sens de la métrique de Weyl. (Weyl 1921)

Ce théorème, Weyl l'explique, semble être d'une importance physique profonde. La structure conforme est l'expression mathématique de la structure causale dans un espace-temps de la relativité générale. L'interprétation physique de la structure projective est qu'elle caractérise la chute inertielle de masses ponctuelles, indépendamment du paramétrage, c'est-à-dire indépendants des conventions de mesure du temps local. Ainsi le théorème de Weyl montre que la structure causale et inertielle de l'espace-temps détermine de façon unique sa métrique Weylienne mais pas riemannienne. Cette observation a été reprise par Ehlers / Pirani / Schild un demi-siècle plus tard, dans leur célèbre article : *The geometry of free fall and light propagation* (Ehlers 1972). Ce théorème a fait prendre conscience, à la communauté des chercheurs en théorie de la gravitation, du caractère fondamental des structures métriques de Weyl pour la gravitation.

Aperçu sur Weyl dans la fin des années 1920.

Dans les années suivantes (1923-1925) Weyl a commencé son vaste programme de recherche dans la théorie des représentations des groupes de Lie (Hawkins, 2000). Après un intermède, consacré à d'intenses études en philosophie des sciences mathématiques, fin 1925 et en 1926 (Weyl, 1927), Weyl se tourna vers la mécanique quantique qui émergeait. Il a publié son livre sur *la théorie des groupes et la mécanique quantique* (Weyl 1928) et, peu après, sur l'équation de Dirac en théorie de relativité générale avec comme idée d'utiliser $U(1)$ comme groupe de jauge. Cette idée avait été proposée, dans des contextes différents par E. Schrödinger, F. London, O. Klein et V. Fock[6]. Dans les années 1920 il a commencé une correspondance avec E. Cartan, interrompue pendant quelques années, mais reprise en 1930. Dans la phase ultérieure de la correspondance des deux mathématiciens ont tenté de trouver comment ils pourraient se mettre d'accord sur les principes fondamentaux de géométrie infinitésimale dans la région dominée par les idées de la relativité générale. Nous reviendrons sur ce point à la fin du présent document.

3. CARTAN

Vers une version infinitésimale des espaces kleiniens. En 1921/1922 Cartan étudie les nouvelles questions, soulevées par la théorie de la relativité générale (RG), pour la géométrie différentielle. À cette époque, il pouvait déjà s'appuyer sur une expertise considérable dans la théorie des *groupes infinitésimaux de Lie* (aujourd'hui *algèbre de Lie*)[7], qu'il avait acquise sur une période d'environ trente ans. Entre autres, il avait classifié les groupes de Lie simples complexes (Cartan 1894) et vingt ans plus tard les groupes réels, Cartan (1914). En outre, il a amené à la perfection l'utilisation de *formes différentielles* (« formes de Pfaff ») en géométrie différentielle (Katz, 1985). En 1910, il a commencé à décrire la géométrie différentielle des mouvements classiques en généralisant la méthode de Darboux, des" trièdres mobiles » (Cartan 1910). [8]

Dans le début des années 1920 Cartan s'est tourné vers une refonte du programme kleinien de la géométrie d'un point de vue géométrique infinitésimal. Dans plusieurs notes dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, il commença par exposer ses idées sur la façon d'utiliser *les structures des groupes infinitésimaux* pour l'étude des fondements de la RG. Différente de Weyl et de la plupart des autres auteurs, il ne s'est pas appuyé sur le « calcul absolu » de Ricci / Levi-Civita. Il s'est plutôt appuyé, autant que possible, sur son expertise du calcul des formes différentielles. À partir du *déplacement parallèle* de Levi-Civita comme Weyl, il a généralisé cette idée aux connexions, en accord avec divers groupes, et mis au point une méthode générale pour la géométrie différentielle, qui ont transféré les idées de Klein du programme d'Erlangen à un voisinage infinitésimal (d'un point) dans une variété différentiable. Ces voisinages infinitésimaux étaient « collés » ensembles par la connexion généralisée d'une manière (« déformée ») telle, que leur ensemble ne permettait pas, en général, de se réduire à une géométrie classique kleinienne. Les structures qui en sont issues ont été appelées, plus tard, *géométries de Cartan* (Sharpe, 1997).

Déformer l'espace euclidien.

6 (Vizgin 1994, Goenner 2004, Scholz).

7 Ici nous allons alterner entre la terminologie historique et la terminologie actuelle sans discrimination.

8 Pour une discussion plus détaillée de la suite voir (Nabonnand 2009).

Avant que Cartan puisse « déformer » l'espace euclidien $E^{3,}$ celui-ci devait d'abord être analysé dans le sens littéral du mot.

Autrement dit, l'espace homogène E^3 Isom $E^3/SO(3, R)$ devait être pensé comme un assemblage de voisinages infinitésimaux liés ensemble par une connexion, de sorte que, d'un point de vue intégral, la géométrie euclidienne classique devait être retrouvée. Dans une deuxième étape, on se proposait de déformer la structure résultante pour obtenir une géométrie infinitésimale plus générale.

Afin d'analyser l'espace euclidien de coordonnées $x = (x_1, x_2, x_3)$ Cartan a postulé que

- Des *repères* définis par des bases constituées de 3 vecteurs orthogonaux («trièdres" – triades), $(\boldsymbol{e_1}(x), \boldsymbol{e_2}(x), \boldsymbol{e_3}(x))$, sont définis et donnés en chaque point A;

- Un repère de ce type en A' « point infiniment proche de A » (décrit dans la notation ancienne par les coordonnées $x + dx$) peut être relié à celui de A par un transport parallèle (classique). Cartan exprima cela au moyen de 1-formes différentielles

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \qquad \omega_{ij}, = - \omega_{ji}, \qquad (1 \leq i, j \leq 3).$$

En tout, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{23})$ sont valorisés dans le groupe euclidien infinitésimal inhomogène $R^3 \oplus so(3)$[9].

Cartan savait que dans l'espace euclidien les ω devaient satisfaire à la condition de compatibilité

$$\omega'_i = \sum_k [\omega_k\, \omega_{ki}] \; ; \;\; \omega'_{ij} = \sum_k [\omega_{ik}\, \omega_{kj}].$$

Il a appelé cette relation, *l'équation de structure* de l'espace euclidien, qui plus tard sera nommée *équation de Maurer-Cartan.* Ici ω'_i dénote la dérivée extérieure de la forme différentielle et les crochets dénotent le produit alterné des formes différentielles.

En utilisant les notations avec les indices supérieurs et inférieurs ω^i et ω_j^k pour les formes différentielles et la convention de sommation d'Einstein, l'équation peut être réécrite

9 Le déplacement infinitésimal $dx = (dx_1, dx_2, dx_3)$ de A en A' est décrit par un vecteur tangent $\sum \omega^i e_i$. Les ω^i sont les 1-formes différentielles duales des e_i (elles dépendent linéairement des dx_j). Le changement entre les bases orthogonales en A, et celles définies par e'_1, e'_2, e'_3 en A' est décrit par une rotation infinitésimale, $de_i = \sum \omega_i^j e_j$. $((\omega_i^j)$ qui est un élément de l'algèbre de Lie so(3)), dont les entrées ne dépendent pas seulement de façon linéaire de dx_k mais aussi des paramètres du groupe des rotations (que Cartan écrit x_3, x_4, x_6).

(4) $d\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k{}^i, \qquad d\omega_i{}^j = \omega_i{}^k \wedge \omega_k{}^j$

Passant à « l'espace euclidien déformé », Cartan admet la possibilité que le transport parallèle des triades sur un contour fermé infinitésimale puisse se traduire par une « petite translation infinitésimale » et/ou une « rotation » infinitésimale (1922d Cartan, 593f.). Alors, les équations de structure seront généralisées, et s'écriront dans un symbolisme modérément modernisé,

(5) $d\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k{}^i + \Omega^i$

(6) $d\omega_i{}^j = \omega_i{}^k \wedge \omega_k{}^j + \Omega_i{}^j$

avec des 2-formes différentielles Ω^i (valeurs des composantes du vecteur de translation du groupe euclidien) et $\Omega_i{}^j$ (composantes de la matrice de rotation), qui décrivent la déviation par rapport à la géométrie euclidienne de l'espace. Cartan a appelé respectivement (5) la *torsion* et (6) la forme de *courbure*.

Espaces de Cartan en général.

Un peu plus tard, Cartan est allé plus loin et généralisé son approche de la déformation des espaces euclidiens à d'autres espaces homogènes. L'idée sous-jacente était :

> On conçoit que ce qui a été fait pour le groupe euclidien, dont les équations de structure [(4) dans notre notation, ES] sont déformées en [(5, 6)], peut se répéter pour n'importe quel groupe fini [en dimensions] ou infini [en dimensions], (Cartan 1922a, 627).

Comme annoncé dans cette déclaration programmatique, Cartan a étudié divers « espaces avec des connexions » ou « espaces non holonomes » (appelés plus tard *espaces de Cartan*) dans les années suivantes[10]. Les espaces de Cartan M sont issus de la « déformation » d'un espace homogène classique S avec un groupe de Lie L agissant transitivement et avec un groupe d'isotropie G, tel que

$$S \approx L / G.$$

Il s'est intéressé aux voisinages infinitésimaux dans S décrit, dans le symbolisme moderne, par

10 La terminologie «non-holonome" a été reprise de la spécification des contraintes de la mécanique classique, voir (Nabonnand 2009).

$$\mathbf{l}/\mathbf{g} \quad \mathbf{l}^* \qquad \mathbf{l} = \text{Lie L}, \qquad \mathbf{g} = \text{Lie G}$$

l* est un « sous-groupe » infinitésimal (c'est-à-dire une sous-algèbre de **l**), invariante sous l'action adjointe de G[11].

La « déformation » d'une géométrie kleinienne dans $S \approx L/G$ présuppose l'identification d'un voisinage typique infinitésimal de S avec les voisinages infinitésimaux de tout point d'une variété M (« continuum » de Cartan) qui avait été utilisée pour paramétrer l'espace déformé. Cartan a proposé une telle identification en termes de collage ajusté d'espaces homogènes S en tout point p M. Plus précisément, **l*** devait être « identifié » avec T_xM pour tous les points x M de telle manière à ce que la transition vers un point p' infiniment proche pourrait être liée à T_pM suffisamment continûment. Une telle identification n'a pas toujours été sans problèmes, même si en général Cartan a présenté le groupe L de transformation comme fonctionnant sur une classe (bien choisie) de « systèmes de référence » (« repères ») ce qui permettait de tirer une telle identification des éléments infinitésimaux de la partie « translation » de L[12]. Ces subtilités mises de côté ici, une connexion de type 1-forme différentielle ω sur M valorisée dans **l** pourrait être utilisée pour définir une connexion dans la géométrie infinitésimale kleinienne. Alors les équations de structure (5), (6) définissent respectivement la torsion et la courbure des espaces « non-holonomes » (espaces de Cartan).

En particulier, Cartan a étudié les espaces non holonomes suivants

- Groupe de Poincaré, dans les documents sur la base géométrique de la relativité générale (Cartan 1922a, Cartan 1923a, Cartan 1924b) (pour la torsion $\Omega^i = 0$, un tel espace de Cartan réduit à une variété Lorentzienne et pourrait être utilisé pour traiter la théorie d'Einstein en termes géométriques de Cartan),

- groupe de similitudes inhomogènes (si la torsion est nulle, ce cas se réduit à des variétés weyliennes),

- groupe conforme (Cartan 1922 b),

- groupe projectif (Cartan 1924c).

Dans ce dernier cas, Cartan a introduit des systèmes de référence barycentriques dans le voisinage infinitésimal d'une variété (espaces tangents T_pM) (« repères attachés aux différents points de la variété") et en a examiné les transformations projectives. Il a fait remarquer que cela est possible " d'une infinité de manières différentes dépendantes du choix des systèmes de référence ".[13] Cela revient à considérer la fermeture projective de tout l'espace tangent.

11 À comparer avec la présentation moderne de la géométrie de Cartan dans(Sharpe, 1997).

12 Voir la discussion avec Weyl ci-dessous.

De cette façon, Cartan a développé un impressionnant cadre conceptuel pour l'étude de différents types de géométries différentielles riemanniennes, lorentziennes, weyliennes, affines, conformes, projectives,.. . Au-delà de leur caractérisation par la connexion et la courbure, Cartan a ajouté la possibilité d'inclure un nouveau phénomène, la torsion. Et tout cela est issu de la méthode unifiée de Cartan d'adaptation du point de vue kleinien à la géométrie infinitésimale.

Problème de l'espace de Cartan.

Cartan a pris connaissance du problème de l'espace de Weyl à partir de la traduction française de ETM (Weyl 1922a) et lui a donné sa touche personnelle (Cartan1922c, Cartan 1923b). Il a essayé de donner un sens à la description de Weyl de la façon dont la « nature de l'espace » devrait être caractérisée par des « rotations" opérant sur le voisinage infinitésimal, en termes de ses propres concepts. Il a interprété la description vague de Weyl de la « nature de l'espace » comme désignant une classe d'espaces non holonomes avec un groupe d'isotropie $G \quad SL_n$ et le groupe correspondant inhomogène $L \quad G$ x $\quad ^n$.

Cartan a interprété la « connexion métrique » de Weyl dans le sens d'une classe de connexions (de Cartan) $[\omega]$ où G, et respectivement L, sont deux exemplaires de la classe, ω, $\varpi \in [\omega]$, qui diffèrent par une 1-forme valorisée dans **g** seulement. C'était une reformulation plausible de la « partie analytique » de la formulation de Weyl ; mais Cartan est passé sans remarquer la distinction faite par Weyl entre les « congruences » (G) et les « similitudes » ($\breve{G}$). Cela a eu pour conséquence de supprimer l'extension de groupe spécifique (essentiellement $\breve{G} = G$ x $\quad ^+$), qui conduisait à la structure d'échelle de jauge de Weyl.

Cartan a réinterprété partie « synthétique » de l'analyse de Weyl, dans ce contexte, et a déclaré

- « le premier axiome de M. H. Weyl » : Dans toutes les classes $[\omega]$ de définissant une connexion (« métrique") à valeurs dans L, on peut trouver une connexion avec *torsion* nulle.

- « le Second axiome de M. H . Weyl » : Chaque classe $[\omega]$ ne donne lieu qu'à une seule connexion sans torsion.

La reformulation par Cartan du « premier axiome » n'avait, en fait, plus grand-chose à voir avec le postulat de liberté de Weyl, mais c'était, au moins, une tentative de lui donner un sens mathématique. En utilisant ses connaissances dans la classification des groupes de Lie infinitésimales, il pouvait faire valoir que le « premier axiome » est satisfait non seulement par les groupes spéciaux orthogonaux généralisés $SO(p, q)$, mais aussi par le groupe spécial linéaire lui-même, le groupe symplectique (si n est pair), et par le plus grand sous-groupe de

13 « .. une infinité des manières différentes suivant le choix des repères ». Traduit en langage beaucoup plus moderne, Cartan a laissé entendre ici la possibilité de trivialisations différentes du fibré projectif tangent.

SL_n avec un sous-espace unidimensionnel invariant (Cartan 1923B, 174). Si le second axiome est ajouté, seuls les groupes spéciaux orthogonaux y satisfont (Cartan 1923B, 192).

La simplification de Cartan évitait les subtilités et les imprécisions du « postulat de la liberté » de Weyl. En tenant compte de la rationalisation de la partie analytique de l'analyse, il est arrivé à une caractérisation légèrement modifiée du problème de l'espace. Sous cette forme, elle constitua le chapitre suivant de la géométrie différentielle connue sous le vocable de « *problème de l'espace de Cartan* » (SS Chern, H. Freudenthal, W. Klingenberg, Kobayashi/Nomizu).

Dans les années 1950-1960 le problème de l'espace de Cartan a été traduit en termes de faisceau de fibres dans la géométrie différentielle moderne sans recourir aux espaces de Cartan. Dans ces termes, un faisceau de n-repères sur une variété différentiable *M*, de groupe réductible $G \subset SL_n$, a été appelé une *G-structure* sur M. Dans les *G*-structures, des connexions linéaires avec ou sans torsion peuvent être étudiées. La question centrale du problème de l'espace de *Cartan-Weyl* (c.a.d le problème de l'espace weylien dans la forme réduite de Cartan) se pose ainsi : Quels sont les groupes $G \subset SL_n$ dont la *G*-structure comporte exactement une connexion sans torsion ?

Il s'est avéré que la réponse était essentiellement celle donnée par Weyl et Cartan, c'est-à-dire les groupes spéciaux orthogonaux généralisés de toute signature, avec quelques autres cas particuliers supplémentaires (Kobayashi 1963, vol. II). Du point de vue de la théorie des groupes, ces considérations étaient encore étroitement liées au problème de Weyl de l'espace, alors que la question géométrique avait été modifiée à deux reprises, d'abord par Cartan, puis par les géomètres « différentiels » de la génération suivante. Pour le problème de l'espace, seule une minorité des auteurs percevaient la différence entre Weyl et Cartan (Scheibe 1988, Laugwitz 1958). Ces auteurs soulignaient que l'analyse originelle de Weyl ne devait pas être négligée du point de vue géométrique.

Discussions de Toronto : Erlangen, Riemann et RG.

Lors du Congrès international des mathématiciens, en 1924 à Toronto, Cartan trouva une occasion d'expliquer son point de vue de la géométrie différentielle d'une manière claire et intuitive à un plus large public mathématique. Il commença par une référence au problème classique de l'espace dans le sens de la fin du 19$^{\text{ième}}$ siècle :

> On sait depuis F. Klein (programme d'Erlangen) et S. Lie, le rôle important joué par la théorie des groupes dans la géométrie. H. Poincaré a popularisé dans le grand public scientifique cette idée fondamentale que la notion de groupe est à la base première des spéculations géométriques ...
>
> ...Dans chacune de ces géométries, on attribue, pour la commodité du langage, à l'espace dans lequel les figures étudiées sont localisées les propriétés elles-mêmes du groupe correspondant, ou groupe *fondamental* [Hauptgruppe] ...

Il est clair, cependant, que le mémoire célèbre de Riemann : « Uber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen" était à l'opposé de cette perspective.

> À première vue, la notion de groupe semble étrangère à la géométrie des espaces de Riemann, car ils ne possèdent pas l'homogénéité de n'importe quel espace avec un groupe fondamental [Hauptgruppe]. En dépit de cela, même si un espace de Riemann n'a pas d'homogénéité absolue, il possède cependant une sorte d'homogénéité infinitésimale ; où dans un voisinage immédiat il peut être assimilé à un [espace kleinien] ....

Cette « assimilation », tel qu'il l'a comprise, était en relation étroite avec les repères de références ou, dans le langage de la physique, des systèmes d'observateurs de la relativité. Cartan a observé :

La théorie de la relativité doit faire face à la tâche paradoxale d'interprétation, dans un univers non homogène, de tous les résultats de d'expériences multiples par des observateurs qui (localement) croient (et constatent) une homogénéité de l'univers. Cette évolution a partiellement comblé le fossé qui séparait espaces riemanniens de l'espace euclidien (« qui permit de combler en partie le fossé qui séparait les espaces de Riemann de l'espace euclidien") .... (Cartan 1924 a)

Ainsi, il ne cache pas l'importance du rôle de la relativité générale qui a posé la question de savoir comment mettre en relation les espaces homogènes du problème classique de l'espace avec les espaces inhomogènes de Riemann. Mais alors que dans la physique et la philosophie de la physique le débat sur l'évolution du rôle de règles « rigides » ou même de corps « rigides » était toujours en cours, Cartan avait lui-même été en mesure de « combler le fossé qui sépare les espaces riemanniens de l'espace euclidien » dans son propre travail - s'appuyant sur les travaux de Lévi-Civita et sur sa propre expertise en théorie des groupes de Lie et des formes différentielles. C'était semblable à ce que Weyl avait eu l'intention de faire, mais Cartan a conçu une méthode assez générale pour construire des espaces partiellement ou globalement non homogènes à partir d'espaces infinitésimaux homogènes. En conséquence, Cartan a réconcilié le programme d'Erlangen et la géométrie différentielle de Riemann sur un niveau encore plus élevé que celui que Weyl avait perçu.

4. DISCUSSION CARTAN-WEYL (1930)

Les entretiens de Princeton de Weyl en 1929.

En juin 1929, Weyl visita les États-Unis et profita de l'occasion pour faire connaître la méthode de Cartan au groupe des « géomètres différentiels » de Princeton. O. Veblen et T.Y. Thomas avaient commencé à étudier la géométrie différentielle projective du point de vue de la structure des chemins (Veblen 1928, Thomas 1926, Thomas 1938). Pour concilier les deux points de vue, Weyl a mis en avant l'approche constituée par les géométries kleiniennes infinitésimales de Cartan. Il a indiqué, en particulier, comment identifier le « plan tangent » généralisé de Cartan, l'espace infinitésimal homogène **l***, dans la notation ci-dessus avec l'espace tangent T_pM (« voisinage infinitésimal » de p) de la variété différentiable M. Pour rendre l'approche de Princeton comparable à celle Cartan, il ne suffisait pas qu'un isomorphisme **l*** $\rightarrow$ T_pM soit donné pour chaque point $p \in M$. Weyl a fait valoir également le besoin d'une condition de contact (« semi-osculateur ») d'ordre supérieur, (Weyl 1929, 211). Dans ce cas, une connexion projective sans torsion, au sens de Cartan, était uniquement caractérisée par une structure de chemin projective comme étudiée par le groupe de Princeton (en laissant de côté un autre aspect technique).

Désaccord de Cartan.

Cartan désapprouvait la présentation que Weyl avait faite de son approche. Il protesta dans une lettre écrite début 1930 :

Je prends connaissance de votre article récent (...) paru dans le « Bulletin of the Amer. Math. Society ». Je ne crois pas fondées les critiques que vous adressez à ma théorie des espaces â connexion projective . . . L'exposition que vous faites de ma théorie ne répond pas du tout à mon point de vue. ... (Cartan à Weyl, 5.1.1930)

Une correspondance de 3 lettres entre Janvier et Décembre 1930 suivirent[14]

Cartan contestait qu'un espace infinitésimal kleinien doive être lié aussi strictement à l'espace tangent T_pM de la variété comme Weyl l'indiquait. Il défendait un point de vue beaucoup plus général.[15] Il est même allé jusqu'à admettre un espace homogène de dimension différente de celle de la variété de base.[16] Ainsi Cartan tend vers ce qui allait plus tard devenir les faisceaux de fibres sur la variété, un fibré projectif avec des fibres de dimension n sur une variété de dimension m. D'autre part, il avait étudié également les conditions dans lesquelles les courbes intégrales des équations différentielles du second ordre peuvent être considérés comme des géodésiques d'une connexion projective (« normale ») (1924c Cartan, 28ff)

Weyl insista encore plus sur la nécessité d'une identification (« semi-osculatrice ») de l'espace infinitésimal homogène avec les espaces tangents de la variété, afin d'obtenir une structure géométrique différentielle qui serait vraiment intrinsèque à M. Il a rappelé à son

14 La correspondance est conservée à l'ETH de Zurich, Handschriftenabteilung, (Cartan 1930). Je remercie P. Nabonnand de m'avoir permis d'accéder à une transcription.

15 « En tous cas le problème d'établir la correspondance ponctuelle entre l'espace à connexion projective et l'espace projectif tangent ne se pose pas ici pour moi : C'est un problème intéressant mais qui, dans ma théorie est hors de question « (Cartan 1930, Cartan à Weyl 01/05/1930).

16 « On pourrait de même généraliser la géométrie différentielle projective à n dimensions sur un continuum à $m \neq n$ dimensions ... » (Cartan à Weyl 05/01/1930).

correspondant qu'ils avaient déjà discuté de cette question en 1927, après un discours de E. Cartan à Berne :[17]

> Je me souviens que nous avions déjà discuté de cette question à Berne, et que je n'avais pas réussi à vous faire comprendre mon point de vue. (Weyl de Cartan 24/11/1930)

En particulier pour les structures conformes et projectives Weyl voyait alors de grands avantages aux études du groupe de Princeton (Veblen, Eisenhart, Thomas). Apparemment, il en a conclu qu'ils ne pouvaient être raccordés à l'approche de Cartan qu'après une telle identification avec ajustement (semi-osculatrice).

Bien qu'il ne l'ait pas mentionné dans la discussion, il semble tout à fait probable que l'importation physique des structures conformes (causalité) et projectives (inertie) pour la RG ait joué un rôle fondamental important expliquant l'insistance de Weyl sur l'étude « intrinsèque » des structures conformes et projectives. En 1922, Weyl s'était rendu compte que les structures inertielle / projective et causalité / conforme, ensembles déterminaient une métrique weylienne unique (cf. fin de l'article 2). Ces considérations n'ont de sens, bien sûr, que si les structures conformes et projectives sont pensées comme intrinsèques à la variété.

Tentative pour trouver un compromis.

Bien Cartan ait d'abord défendu son point de vue plus abstrait, il a reconnu qu'il aurait mieux fait de choisir une terminologie différente en évitant le langage intuitif de « espace tangent projectif », qu'il applique même dans le cas le plus abstrait où la dimension de la fibre est différente de celle de la variété M.

Après que Weyl lui ait expliqué pourquoi il insistait sur l'identification plus précise, Cartan est devenu plus conciliant:

...je vous accorde très volontiers. . . . C'est un problème important et naturel de chercher comment l'espace linéaire tangent est 'eingebettet' dans l'espace non-holonome donné. (Cartan à Weyl, 19.12.1930)

À la fin de l'année, après que les premiers problèmes de compréhension mutuelle aient été résolus, Cartan a admis que la question de Weyl n'était pas n'importe quel type de spécification à l'intérieur de son approche plus générale. La vue générale de Cartan n'a été ni retirée ni dévaluée ; plus tard, elle a trouvé son prolongement dans la théorie des faisceaux de fibres. Mais pour les questions les plus intrinsèques de la géométrie différentielle, l'identification de la géométrie infinitésimale kleinienne à l'espace tangent de la variété de base est devenue partie intégrante de la définition standard de la géométrie de Cartan.

17 Cartan (1927)

5. EN GUISE DE RÉSUMÉ

Weyl et Cartan sont partis de points de vue très différents pour l'étude des structures différentielles généralisées géométriques, motivés par le développement de la relativité générale. Tous deux ont mis les structures de groupe infinitésimal au centre de leurs considérations. Dans le début des années 1920 Cartan avait une avance sur Weyl, à cet égard, et ce fut exactement ces considérations géométriques qui ont conduit Weyl dans son propre programme de recherche dans les représentations des groupes de Lie (Hawkins, 2000). Après avoir eu connaissance de la théorie d'Einstein, Cartan a commencé immédiatement à travailler, dans un cadre général, à étudier comment la géométrie différentielle pourrait être liée à une généralisation infinitésimale du programme d'Erlangen de Klein.

Weyl, d'autre part, a commencé à partir d'une généralisation naturelle, motivée philosophiquement, de la géométrie riemannienne qui, comme il l'espérait, depuis environ deux ans, pourrait être utile pour unifier la gravité et de l'électromagnétisme et pourrait aider à résoudre l'énigme d'une compréhension des structures de base de la matière en termes de théorie des champs. Quand il a commencé à douter de la faisabilité d'une telle approche, il se tourna vers une approche conceptuelle philosophique plus générale du fondement de sa géométrie. Cela le conduisit à reprendre l'analyse du problème de l'espace du point de vue de la géométrie infinitésimale.

Les deux auteurs se sont accordés sur l'importance d'utiliser des structures de groupe infinitésimal pour une généralisation de la géométrie différentielle au début des années 1920. Chacun a lu le travail de l'autre et ils ont réussi à les rapprocher, malgré, parfois, des difficultés et avec certaines pauses. Pourtant, à la fin des années 1930 Weyl a admis, dans son analyse par ailleurs très positive et détaillée de l'ouvrage de Cartan paru en 1937 (Cartan 1937), qu'il avait en fait beaucoup de mal à comprendre les ouvrages de Cartan[18]. Mais en dépit des différences en ce qui concerne les outils techniques et les priorités des lignes directrices de recherche, ils se sont accordés essentiellement sur la voie à suivre : comment les connexions dans divers groupes pourraient être mis en œuvre comme outils structurels conceptuels de base dans le développement de la géométrie différentielle « moderne » du deuxième tiers du siècle.

RÉFÉRENCES

Ashketar, Abhay; Cohen, Robert S.; Howard Don; Renn Jürgen; Sarkar Sahoptra; Shimony Abner (eds.). *2003. Revisiting the Foundations of Relativistic Physics : Festschrift in Honor of John Stachel. Vol. 234 of Boston Studies in the Philosophy of Science* Dordrecht etc. : Kluwer.

18 « Est-ce que la raison ne réside pas seulement dans la grande tradition française géométrique dans laquelle Cartan se situe et le style et les bases qu'il considère plus ou moins comme acquises en tant que fond commun de la géométrie, que nous autres nés et éduqués sous d'autres cieux ne partageons pas » (Weyl 1938, 595).

Baeumler, Alfred; Schroeter, Manfred. 1927. *Handbuch der Philosophie. Bd. II. Natur, Geist, Gott*. München : Oldenbourg.

Bourgignon, Pierrre. 1992. Transport parallèle et connexions en géométrie et en physique. In 1830 — 1930 : *A Century of Geometry. Epistemology, History and Mathematics*, ed. L. Boi; D. Flament; J-M. Salanskis. Berlin etc. : Springer pp. 150–164.

Cartan, Élie. 1894. *Sur la structure des groupes de transformations finis et continus* (Thèse). Paris : Nony. In (Cartan 1952ff., I, 137–288) [5].

Cartan, Élie. 1910. "La structure des groupes de transformations continus et la théorie du trièdre mobile." *Bulletin Sciences mathématiques* 34:250–284. In (Cartan 1952ff., III, 145–178) [31].

Cartan, ´Elie. 1914. "Les groupes réels simples finis et continus." *Annales de l'Ecole Normale* 31:263–355. In (Cartan 1952ff., I, 399–492) [38].

Cartan, Élie. 1922a. "Sur les équations de structure des espaces généralisés et l'expression analytique du tenseur d'Einstein." *Comptes Rendus Académie des Sciences* 174:1104ff. In (Cartan 1952ff., III, 625–628) [61].

Cartan, Élie. 1922b. "Sur les espaces conformes généralisés et l'univers optique." *Comptes Rendus Académie des Sciences* 174:857ff. In (Cartan 1952ff., III, 622–624) [61].

Cartan, Élie. 1922c. "Sur un théorème fondamental de M. H. Weyl dans la théorie de l'espace métrique." *Comptes Rendus Académie des Sciences* 175:82ff. In (Cartan 1952ff., III, 629–632) [62].

Cartan, Élie. 1922d. "Sur une généralisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces à torsion." *Comptes Rendus Académie des Sciences* 174:593ff. In (Cartan 1952ff., III, 616–618) [58].

Cartan, Élie. 1923a. "Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée." *Annales de l'Ecole Normale* 40:325–421. In (Cartan 1952ff., III, 659– 746) [38].

Cartan, Élie. 1923b. "Sur un théorème fondamental de M. H. Weyl." *Journal des Mathématiques pures et appliquées* 2:167–192. In (Cartan 1952ff., III, 633–658) [65].

Cartan, Élie. 1924a. "La théorie des groupes et les recherches récentes de géométrie différentielle" (Conférence faite au Congrès de Toronto). In *Proceedings International Mathematical Congress Toronto.* Vol. 1 Toronto 1928 : pp. 85–94. L'enseignement mathématique t. 24, 1925, 85–94. In (Cartan 1952ff., III, 891–904) [73].

Cartan, Élie. 1924b. "Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée." *Annales de l'Ecole Normale* 41:1–25. In (Cartan 1952ff., III, 799–824) [38].

Cartan, Élie. 1924c. "Sur les variétés à connexion projective." *Bulletin Societé Mathématique de France* 52:205–241. In (Cartan 1952ff., III, 825–862) [70].

Cartan, Élie. 1927. "La géométrie des groupes et la géométrie." *L'enseignement mathématique* 26:200–225. In (Cartan 1952ff., I, 841–866) [58].

Cartan, ´Elie. 1937. *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle*. Paris : Gauthier-Villars.

Cartan, ´Elie. 1952ff. *Oeuvres Complètes*. Paris : Gauthier-Villars.

Cartan, Elie; Weyl, Hermann. 1930. Korrespondenz, 5.1.1930 (Cartan to W.), 24.10.1930 (Weyl to C.), 19.12.1930 (Cartan to W.). Nachlass Weyl, University Library ETH Zürich, Hs 91a:503, 503a, 504.

Chorlay, René. 2009. *Mathématiques globales : l'émergence du couple local/global dans les théories géométriques* (1851–1953). Paris : Albert Blanchard.

Deppert, W. e.a. (ed.s.). 1988. *Exact Sciences and Their Philosophical Foundations.* Frankfurt/Main : Peter Lang.

Ehlers, J¨urgen; Pirani, Felix; Schild-Alfred. 1972. The geometry of free fall and light propagation. In *General Relativity, Papers in Honour of J.L. Synge,* ed. Lochlainn O'Raiferteagh. Oxford : Clarendon Press pp. 63–84.

Einstein, Albert. 1987ff. *The Collected Papers of Albert Einstein*. Princeton : University Press.

Goenner, Hubert. 2004. "On the history of unified field theories." *Living Reviews in Relativity* 2004-2. [http://relativity.livingreviews.org/Articles/lrr-2004-2].

Goldstein, Catherine; Ritter, Jim. 2003. "The varieties of unity : Sounding unified theories 1920–1930." In (Ashketar 2003).

Gray, Jeremy (ed.). 1999. *The Symbolic Universe : Geometry and Physics* 1890–1930. Oxford : University Press.

Hawkins, Thomas. 2000. *Emergence of the Theory of Lie Groups. An Essay in the History of Mathematics* 1869–1926. Berlin etc. : Springer.

Katz, Victor J. 1985. "Differential forms — Cartan to De Rham." *Archive for History of Exact Sciences* 33:321ff.

Kobayashi, Shoshichi; Nomizu, Katsumi. 1963. *Foundations of Differential Geometry*, vol. I. London etc. : John Wiley.

Kosman-Schwarzbach, Yvette 2011. *The Noether Theorems. Invariance and Conservation Laws in the Twentielth Century* : Berlin etc. : Springer

Laugwitz, Detlef. 1958. "¨Uber eine Vermutung von Hermann Weyl zum Raumproblem." *Archiv der Mathematik* 9:128–133.

Nabonnand, Philippe. 2009. "La notion d'holonomie chez ´Elie Cartan." *Revue d'Histoire des Sciences* 62:221–245.

Noether, Emmy. 1918. "Invariante Variationsprobleme." *Göttinger Nachrichten* pp. 235–257. In Ges. Abh. (1982) 770ff.

O'Raifeartaigh, Lochlainn. 1997. *The Dawning of Gauge Theory*. Princeton : University Press.

Pauli, Wolfgang. 1921. Relativitätstheorie. In *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, vol V.2. Leipzig : Teubner. pp. 539–775, Collected Papers I, 1–237.

Reich, Karin. 1992. "Levi-Civitasche Parallelverschiebung, affiner Zusammenhang, ¨Ubertragungsprinzip : 1916/17-1922/23." *Archive for History of Exact Sciences* 44:77–105.

Ritter, Jim 2011. Geometry as physics : Oswald Veblen and the Princetown school. In K.H Schlote, M. Schneider (eds). *Mathematics meets Physics. A contribution to their Interaction in the 19th and the First Half of the 20th Century*, Berlin etc. : Springer 145-179.

Rowe, David. 1999. "The Göttingen response to general relativity and Emmy Noether's theorems." *In (Gray 1999, 189–233).*

Ryckman, Thomas. 2005. *Reign of Relativity. Philosophy in Physics* 1915–1925. Oxford : University Press.

Scheibe, Erhard. 1988. "Hermann Weyl and the nature of spacetime." In (*Deppert 1988, 61–82).*

Scholz, Erhard. 1999. Weyl and the theory of connections. In (*Gray 1999*). pp. 260–284.

Scholz, Erhard. 2005. Local spinor structures in V. Fock's and H. Weyl's work on the Dirac equation (1929). *In Géométrie au XXième siècle, 1930 – 2000. Histoire et horizons,* ed. D. Flament; J. Kouneiher; P. Nabonnand; J.-J. Szczeciniarz. Paris : Hermann pp. 284–301. [http://arxiv.org/physics/0409158].

Sharpe, Richard W. 1997. *Differential Geometry : Cartan's generalization of Klein's Erlangen program.* Berlin etc. : Springer.

Thomas, Tracy Y. 1926. "A projective theory of affinely connected manifolds." *Mathematische Zeitschrift* 25:723ff.

Thomas, Tracy Y. 1938. Recent trends in geometry. In *American Mathematical Society Semicentennial Publications, vol. II*. New York : American Mathematical Society pp. 98–135.

Veblen, Oswald. 1928. "Projective tensors and connections." *Proceedings National Academy of Sciences* 14:154ff.

Vizgin, Vladimir. 1994. *Unified Field Theories in the First Third of the 20th Century*. Translated from the Russian by J. B. Barbour. Basel etc. : Birkhäuser.

Weyl, Hermann. 1918a. "Gravitation und Elektrizität." *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* pp. 465–480. In (Weyl 1968, II, 29–42) [31], English in (O'Raifeartaigh 1997, 24–37).

Weyl, Hermann. 1918b. "Reine Infinitesimalgeometrie." *Mathematische Zeitschrift* 2:384–411. In (Weyl 1968, II, 1–28) [30].

Weyl, Hermann. 1921. “Zur Infinitesimalgeometrie : Einordnung der projektiven und der konformen Auffassung.” *Nachrichten Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften* pp. 99–112. In (Weyl 1968, II, 195–207) [43].

Weyl Hermann 1922a. *Temps, Espace, Matière*. Leçons sur la théorie de la relativité générale. Traduit de la quatrième édition allemande par, G. Juvet, R. Leroy. Paris Blanchard. Réimprimé (Blanchard) 1958

Weyl, Hermann. 1922b. S*pace – Time – Matter*. Translated from the 4th German edition by H. Brose. London : Methuen. Reprint New York : Dover 1952.

Weyl, Hermann. 1923. *Mathematische Analyse des Raumproblems*. Vorlesungen gehalten in Barcelona und Madrid. Berlin etc. : Springer. Nachdruck Darmstadt : Wis-senschaftliche Buchgesellschaft 1963.

Weyl, Hermann. 1927. *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*. München : Oldenbourg. In (Baeumler 1927, Bd. II A); separat. Weitere Auflagen 21949, 31966. English with comments and appendices (Weyl 1949).

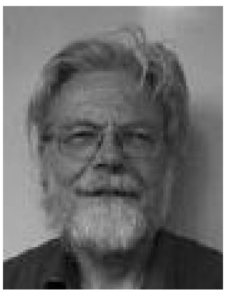
Weyl, Hermann. 1928. *Gruppentheorie und Quantenmechani*k. Leipzig : Hirzel. 21931, English 1931.

Weyl, Hermann. 1929. “On the foundations of infinitesimal geometry.” *Bulletin American Mathematical Society* 35:716–725. In (Weyl 1968, III, 207–216) [82].

Weyl, Hermann. 1938. “Cartan on groups and differential geometry.” *Bulletin American Mathematical Society* 44:598–601. In (Weyl 1968, IV, 592–595) [161].

Weyl, Hermann. 1949. *Philosophy of Mathematics and Natural Science.* 2nd ed. 1950. Princeton : University Press^{2}. 1950.

Weyl, Hermann. 1968. *Gesammelte Abhandlungen*, 4 vols. Ed. K. Chandrasekharan. Berlin etc. : Springer.



Ehrard Scholz [scholz@math.uni-wupertal.de] est professeur d’histoire des mathématiques à l’université de Wuppertal (Allemagne). Son domaine de recherche est l’histoire des mathématiques du 19$^{\text{ième}}$ et 20$^{\text{ième}}$ siècle, l’étude historique de la philosophie des mathématiques et des sciences, des relations entre les mathématiques et leurs applications et des modèles cosmologiques géométriques de Weyl.