

I.A.P

M2 Astrophysique

Année 2005-2006

Rapport de Stage de Jacques Fric
Effectué au CEA/DAPNIA/SPP
Directeur de Stage : Gabriel Chardin

Titre du stage :

Quelques aspects remarquables de la phénoménologie des trous noirs
de Kerr Newman

Quelques aspects remarquables de la phénoménologie des trous noirs de Kerr Newman

Résumé :

A partir de l'article plutôt obscur de R. Kerr que nous commenterons et des articles de B. Carter plus explicites, nous rappellerons quelques concepts fondamentaux de la Relativité générale, en particulier la notion de masse négative que nous expliciterons, et nous étudierons comment la charge se couple à ce type espace temps pour produire de façon non triviale un facteur gyromagnétique de 2.

En étudiant les symétries de la solution, en particulier celle permise par l'extension vers un anti univers « miroir » du fait que la singularité est déformée en anneau par la rotation, ceci nous permettra de montrer qu'un trou noir de Kerr Newman, offre un modèle permettant de représenter à la fois l'électron et son antiparticule qui, de plus, suggère que l'antimatière produit un champ gravitationnel répulsif !

Cette étude nous révélera que l'espace temps de Kerr Newman, génère des interactions très diversifiées à courte et longue portée de nature attractive ou répulsive.

L'analyse du quatrième invariant « surprise » découvert par B. Carter permettant la séparabilité de l'équation de Hamilton Jacobi nous révélera certains aspects fondamentaux surprenants de la nature physique de ce type d'espace temps.

Après une caractérisation des différentes régions et hypersurfaces critiques de cette solution nous traiterons en détail de l'une d'entre elles. Il existe une « machine temporelle » où deux dimensions sont de type « temps »¹, où il peut exister des boucles temporelles, ce qui entraîne une violation flagrante de la causalité. Ceci nous conduira à préciser la notion de causalité en Relativité générale. A la fin de l'étude, nous aborderons des aspects plus spéculatifs, en proposant une autre forme de la métrique, dans d'autres coordonnées. Cette étude nous suggérera que la variable temps t bien adaptée aux systèmes statiques n'est pas forcément la meilleure variable pour représenter physiquement la dynamique des systèmes stationnaires.

¹ Nous préciserons ce concept au chapitre 9-7

Les trous noirs

QUELQUES ASPECTS REMARQUABLES DE LA PHÉNOMÉNOLOGIE DES TROUS NOIRS DE KERR NEWMAN.....	2
RÉSUMÉ :.....	2
1- INTRODUCTION.....	8
2-AU COMMENCEMENT : L'ARTICLE DE KERR	9
3-POUR Y COMPRENDRE QUELQUE CHOSE :.....	12
1- MÉTRIQUE DE KERR NEWMAN : PRÉSENTATION GÉNÉRALE.....	12
2- LA CHARGE, LA MASSE (ÉNERGIE), LE SPIN EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE	14
2-1 <i>Cas de la charge</i>	14
2-2 <i>Cas de la masse (énergie), espaces temps stationnaires</i>	14
2-3 <i>Cas du spin</i>	14
3- CONDITIONS D'ÉNERGIE EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE.....	14
4- ÉNERGIE DE LA PARTICULE DE TEST DANS UN CHAMP GRAVITATIONNEL.....	15
5- HORIZONS DE KILLING ET IMPLICATIONS.....	15
.....	15
4- ENERGIE NÉGATIVE EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE.....	16
1- DÉFINITION DE LA MASSE NÉGATIVE EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE. (BONDI- 1957).....	16
2- ENERGIE NÉGATIVE DANS UN CHAMP GRAVITATIONNEL : LE CAS DE L'ERGOSPHERE.....	17
2-1 <i>Trajectoires où l'énergie est négative dans l'ergosphère (cas TN de Kerr)</i>	17
2-2 <i>Mouvement géodésique dans l'ergosphère</i>	17
2-3 <i>Exemple numérique de conditions entre $d\Phi/dt$ et r pour que l'énergie soit négative dans l'ergosphère dans le plan équatorial</i>	18
<i>Définition de la vitesse angulaire du trou noir</i>	19
2-4 <i>Les géodésiques à énergie négative plongent vers l'horizon</i>	20
2-5 <i>Sommes nous plus léger sur une géodésique à énergie négative ?</i>	20
2-6 <i>Quelle signification physique donner à l'«énergie négative »</i>	21
2-7 <i>Forces de marées et accélération subies par le voyageur</i>	22
2-8 <i>Principe du calcul du stress lié aux forces de marées</i>	22
5- FACTEUR GYROMAGNÉTIQUE, EN MÉTRIQUE DE KERR NEWMAN.....	25
1- CALCUL À PARTIR DU POTENTIEL ÉLECTROMAGNÉTIQUE	25
<i>Vérification du calcul à partir du tenseur électromagnétique</i>	25
2-TENSEUR ÉLECTROMAGNÉTIQUE ET CHAMP ÉLECTRIQUE ET MAGNÉTIQUE « CLASSIQUE ».....	26
3- LIMITE ASYMPTOTIQUE À L'INFINI : ON TROUVE $G = 2$	26
4- EXPLICATION PHYSIQUE DE CE FACTEUR GYROMAGNÉTIQUE DE DEUX.....	26
6- SYMÉTRIES DE LA MÉTRIQUE KERR: MATIÈRE ET ANTIMATIÈRE?.....	28
1-SYMÉTRIE FORMELLE DES ÉQUATIONS.....	28
2- ETUDE PHÉNOMÉNOLOGIQUE PAR L'ÉQUATION DU MOUVEMENT GÉODÉSIQUE AXIAL	29
3-SYMÉTRIE ENTRE LE SOUS ESPACE ($R > 0$) ET CELUI ($R < 0$).....	29
4- ACTION DE LA MASSE DU TROU NOIR.....	29
5-ACTION DU SPIN DU TROU NOIR.....	30
<i>Equation géodésique équatoriale</i>	30
6- LE CAS PARTICULIER DE LA CHARGE DU TROU NOIR.....	32
7-ÉTUDE DÉTAILLÉE DU MOUVEMENT SUR UNE GÉODÉSIQUE AXIALE.....	32
7-1 <i>Calcul des paramètres du mouvement</i>	33
7-2- <i>Graphe du potentiel sur l'axe, V_{eff}, en fonction de r, équation du mouvement</i>	35
7-EXTREMUM DU POTENTIEL AXIAL: CAS DU TROU NOIR DE KERR ($Q=0$).....	36
1- CALCUL DANS CE CAS.....	36
2- ÉNERGIE MINIMALE POUR FRANCHIR LA BARRIÈRE DE POTENTIEL.....	36
3-GRAPHE SYNTHÉTIQUE	37

8- QUATRIÈME INVARIANT DANS LA MÉTRIQUE DE KERR.....	38
1-SÉPARABILITÉ DE L'ÉQUATION DE HAMILTON JACOBI.....	38
2- LE TENSEUR DE KILLING DE LA MÉTRIQUE DE KERR.....	38
3- L'INVARIANT ASSOCIÉ AU TENSEUR DE KILLING : GÉNÉRALITÉS.....	38
4- CALCUL DU TENSEUR DE KILLING DE KERR.....	39
5 – CALCUL DE L'INVARIANT ASSOCIÉ AU TENSEUR DE KILLING DE KERR.....	40
6- POINT SUR LES INVARIANTS, NATURE PHYSIQUE DE CE DERNIER INVARIANT.....	42
7- QUELQUES REMARQUES PHÉNOMÉNOLOGIQUES PRÉLIMINAIRES.....	42
8- INTERPRÉTATION PHYSIQUE À LA LIMITE NEWTONIENNE DE CET INVARIANT.....	42
9- COUPLAGE ÉNERGIE / MOMENT ANGULAIRE.....	43
9- ETUDE DU GENRE DES VECTEURS DE KILLING, DES HYPERSURFACES ET DES RÉGIONS DÉLIMITÉES PAR CES HYPERSURFACES EN MÉTRIQUE DE KERR	44
QUELQUES RAPPELS :.....	44
1- TYPE DE L'HYPERSURFACE QUI DÉLIMITE LA ZONE CRITIQUE DE VIOLATION DE CAUSALITÉ.....	44
1-1 Calcul des racines de l'équation.....	45
1-2 Cas : $\theta = \pi/2$, l'expression se simplifie et se ramène à :	45
1-3 Cas : $\theta \neq \pi/2$, l'équation reste du quatrième degré elle peut s'écrire :	45
1-4 La valeur r maximum de la zone critique est atteinte pour $\theta = \pi/2$	45
1-5 Détermination du genre de l'hypersurface Σ définie par $g\phi\phi = 0$	46
1-6 L'hypersurface $g\phi\phi = 0$, peut elle être de type nul ?.....	46
1-7 Etude de la vitesse angulaire sur l'hypersurface $g\phi\phi = 0$	46
1-8 ETUDE DE LA SINGULARITÉ DE ROTATION SUR L'HYPERSURFACE $g\phi\phi = 0$	47
Entraînement du référentiel (photons en co et contre rotation).....	47
1-9 Quelques commentaires sur ces courbes.....	48
2 -VECTEUR DE KILLING ROTATION.....	48
3- ERGOSPHERE : ANNULATION DU VECTEUR DE KILLING DE TYPE TEMPS	48
4- HORIZONS.....	49
5 - QUELQUES RELATIONS QUI SIMPLIFIENT LA VIE (ET LES CALCULS).....	50
6 - CALCUL DU DÉTERMINANT DE LA MÉTRIQUE.....	50
7- STATIONNARITÉ: VECTEUR DE KILLING DE TYPE TEMPS NON ORTHOGONAL AUX HYPERSURFACES DE TYPE ESPACE.....	50
8 – VECTEURS CANONIQUES.....	51
9-SYNTHESE TYPES DES VECTEURS DE BASE DE LA MÉTRIQUE, DES HYPERSURFACES ET ZONES CARACTÉRISTIQUES.....	51
10-DIAGRAMMES DÉCRIVANT LES RÉGIONS DÉLIMITÉES PAR UN TROU NOIR DE KERR	52
10 APPLICATION AU CAS DE L'ÉLECTRON DE KERR.....	53
1- MISE EN ÉVIDENCE PAR LES ÉQUATIONS DU FACTEUR GYROMAGNÉTIQUE DE 2.....	53
2- INFLUENCE RELATIVE DES PARAMÈTRES SUR LA MÉTRIQUE	53
3- MASSE ET CHARGE ÉLECTRIQUE.....	53
4- ÉCHELLE DE « A » EN UNITÉS MKS.....	54
5- ÉCHELLE DE GRANDEUR DES PARAMÈTRES CARACTÉRISTIQUES SUPPLÉMENTAIRES.....	54
6- ZONES DE DOMINATION DES ACCÉLÉRATIONS LIÉES À LA MASSE, AU SPIN, À LA CHARGE.....	54
7- POSITIONNEMENT ET VALEUR DES Puits ET PICS DE POTENTIEL SUR L'AXE :.....	55
8-APPLICATION NUMÉRIQUE DANS LE CAS DE L'ÉLECTRON DE KERR:.....	55
9- TAILLE DE LA MACHINE TEMPORELLE ASSOCIÉE À L'ÉLECTRON.....	56
9-1 Extension de la machine temporelle dans l'univers positif.....	56
9-2 Extension de la machine temporelle dans l'univers négatif.....	56
10- CALCUL DES RACINES DE L'ÉQUATION $g\phi\phi = 0$	57
11-LA VIOLATION DE CAUSALITÉ EST SANS CONSÉQUENCES PHYSIQUES DANS LE CAS DE L'ÉLECTRON.....	57
12-ÉLECTRON ET POSITRON.....	57
11-MACHINE TEMPORELLE :	58
1- RAPPEL DES RÉGIONS D'UN TROU NOIR.....	58
2- DEUX DIMENSIONS SONT SIMULTANÉMENT DE TYPE TEMPS.....	59
Mise en évidence simple de la possibilité de boucle temporelle.....	59
Une boucle est un invariant topologique.....	60
3- ET POURTANT L'OBSERVATEUR LOCAL NE PERÇOIT QU'UNE DIMENSION DE TEMPS !.....	60
12-VOYAGE SUR UNE BOUCLE TEMPORELLE.....	61

1-INTRODUCTION.....	61
2- COMPLEXITÉ OPÉRATIONNELLE DU PROBLÈME.....	61
3- BOUCLE TEMPORELLE.....	61
4- DÉBUT DU VOYAGE.....	61
5- CALCUL DES CONTRAINTES SUBIES PAR LES VOYAGEURS	62
6- FORCES DE MARÉE.....	62
7-ACCÉLÉRATION.....	63
8- CALCUL DU MODULE DE L'ACCÉLÉRATION :.....	63
9-APPLICATION NUMÉRIQUE.....	66
10- TEMPS PROPRE PAR RÉVOLUTION SUR UNE BOUCLE TEMPORELLE.....	67
11-ÉNERGIE CONSOMMÉE PAR RÉVOLUTION	67
11-1 Solution extrême.....	68
11-2 Solution réaliste.....	68
13 -EST CE BIEN RAISONNABLE D'ÉTUDIER DES BOUCLES TEMPORELLES ?.....	69
1- ÉTUDE PHÉNOMÉNOLOGIQUE: CARACTÉRISATION DES BOUCLES.....	69
<i>Quelques remarques préliminaires.....</i>	69
<i>On est amené à partitionner de la zone de Type III.....</i>	69
2- REMARQUE SUR LA TOPOLOGIE TORIQUE DE LA MACHINE TEMPORELLE.....	70
<i>Les boucles sur la coordonnée t, relèvent d'un critère topologique.....</i>	70
3- L'ENTRAÎNEMENT DE RÉFÉRENTIEL. RAPPEL DE L'ÉTUDE FAITE EN 9-1-8	70
<i>Partition dans la machine temporelle.....</i>	71
<i>Précisons ce que nous entendons par co-rotation et contre-rotation.....</i>	72
<i>Analyse du diagramme de vitesse angulaire de l'espace : Généralités.....</i>	74
<i>Analyse de la vitesse angulaire de l'espace dans l'anti univers ($r < 0$).....</i>	74
COMMENT UNE LIGNE D'UNIVERS DE TYPE TEMPS PEUT FAIRE DÉCROÎTRE LA COORDONNÉE TEMPS?.....	75
<i>Base locale de vecteurs orthogonaux.....</i>	75
<i>Représentation des vecteurs de base dérivés des coordonnées de BL dans cette base.....</i>	76
<i>Cône de lumière dans la base U, S.....</i>	76
<i>Vecteurs ∂t et $\partial \phi$ dans la base locale orthonormée (U, S) pour $r = +\infty$</i>	77
<i>Vecteurs ∂t et $\partial \phi$ dans la base locale orthonormée (U, S) pour $r = 2$ (ergosurface)</i>	78
<i>Vecteurs ∂t et $\partial \phi$ dans la base locale orthonormée (U, S) pour $r = 1$ (horizon double)</i>	78
<i>Vecteurs ∂t et $\partial \phi$ dans la base locale orthonormée (U, S) pour $r = 0,1$ (près de la singularité)</i>	78
<i>Entrons dans la machine temporelle!.....</i>	78
<i>La situation décrite dans le référentiel local en coordonnées U, S.....</i>	78
<i>Vecteurs ∂t et $\partial \phi$ dans la base locale orthonormée (U, S) pour $r = -0,1$ (près de la singularité)</i>	79
<i>Vecteurs ∂t et $\partial \phi$ dans la base locale orthonormée (U, S) pour $r = -0,5$ (au coeur de la machine)</i>	79
<i>Description détaillée de la situation du point de vue des coordonnées de Boyer Lindquist</i>	79
<i>Vecteurs ∂t et $\partial \phi$ dans la base locale orthonormée (U, S) pour $r = -0,9$ (près de la sortie)</i>	82
<i>Sortons de la machine temporelle dans l'univers négatif.....</i>	82
<i>Vecteurs ∂t et $\partial \phi$ dans la base locale orthonormée (U, S) pour $r = -1,1$ (juste à l'extérieur)</i>	82
<i>Vecteurs ∂t et $\partial \phi$ dans la base locale orthonormée (U, S) pour $r = -\infty$.....</i>	82
<i>Représentation (duale) de la figure 4 dans les coordonnées de Boyer Lindquist.....</i>	83
<i>Evolution de la géométrie des cônes de lumière en fonction de r.....</i>	84
<i>Quelques arguments physiques invoqués pour mettre en doute cette machine temporelle.....</i>	85
<i>Réalité physique de la région sous l'horizon interne</i>	85
<i>Les coordonnées ne sont pas physiques comme le montre la phénoménologie.....</i>	85
<i>Le référentiel en coordonnées de Boyer Lindquist n'est pas inertiel.....</i>	86
RESPECT DES HYPOTHÈSES DE NON PERTURBATION DU CHAMP PAR LA « PARTICULE DE TEST ».....	86
LIMITES LIÉES À L'ÉMISSION D'ONDES GRAVITATIONNELLES DANS UN TEL SYSTÈME.....	86
LIMITES LIÉES À LA « TENSION MAXIMUM » EN RG ENTRE DEUX CORPS.....	87
A LA RECHERCHE D'EXPLICATIONS PLUS FORMELLES.....	87
2- PEUT ON DÉDUIRE DES « INÉGALITÉS » ?.....	87
3- BOUCLES TEMPORELLES ET ÉNERGIE NÉGATIVE.....	87
4- TRAJECTOIRE DU CENTRE DE MASSE.....	88
5- HOLONOMIE DES BOUCLES TEMPORELLES ET CAUSALITÉ.....	88
6- A la recherche d'une solution: Y a il vraiment violation physique de causalité?	89
7- Proposition: Le cinquième élément: Un degré de liberté dans un espace interne local.....	91
8- SYNTHÈSE SUR CE CHAPITRE.....	91
14-CAUSALITÉ.....	93

1- POSITION DU PROBLÈME.....	93
<i>La structure causale est de nature « conforme ».....</i>	93
<i>La solution de Kerr est définie dans le vide.....</i>	93
<i>Les cônes de lumière.....</i>	94
<i>Les congruences de géodésiques nulles pour décrire la variété.....</i>	94
<i>Le formalisme de Newman Penrose.....</i>	94
2-CALCUL DU DÉTERMINANT DE LA MÉTRIQUE.....	95
3- L'EXPLICATION DE B. CARTER : VOIR ANNEXE 1 CHAPITRE 2A ET 2B :CAUSALITÉ.....	95
<i>Commentaires sur l'extrait de l'article de B. Carter.....</i>	95
4- GÉNÉRALITÉS SUR LES STRUCTURES CAUSALES:.....	96
5- DOMAINES DE DÉPENDANCE.....	97
6- DIFFICULTÉS QU'ON PEUT RENCONTRER.....	98
7- ESPACE DE MISNER.....	98
8- SINGULARITÉS.....	99
9- SYNTHÈSE DES DIFFICULTÉS.....	99
10- INVARIANTS SCALAIRES DES ESPACES TEMPS.....	99
11- GÉODÉSQUES DANS LA MACHINE TEMPORELLE.....	100
12- CONGRUENCES PRINCIPALES NULLES.....	101
15-REPRÉSENTATIONS DANS UNE BASE LOCALE DE VECTEURS.	103
A- BASE FORMÉE PAR LES VECTEURS CANONIQUE V,W.....	103
INTRODUCTION :.....	103
1-DÉFINITION DES VECTEURS CANONIQUE V,W.....	103
2- REPRÉSENTATION GRAPHIQUE.....	104
3- DÉFINITION D'UNE MÉTRIQUE EN COORDONNÉES (V, W, AVEC R, Θ CONSTANTS)	105
4- FORME DE LA MÉTRIQUE » DANS LES COORDONNÉES ASSOCIÉES À CES VECTEURS (V, W, R, Θ).....	106
<i>Mapping entre les coordonnées v, w et θ, r.....</i>	107
<i>Forme de Kerr Schild:.....</i>	109
<i>Les symétries révélées par les vecteurs canoniques.....</i>	109
5- « MÉTRIQUE » DANS LES COORDONNÉES ASSOCIÉES AUX VECTEURS CANONIQUE NORMÉS	110
6- COMMENTAIRES SUR LA FORME DE LA MÉTRIQUE :.....	110
7- COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE VECTEURS CANONIQUE V,W.....	110
8- ÉNERGIE ET MOMENT ANGULAIRE CONSERVÉS EN COORDONNÉES V,W.....	110
9- COMPLÈMENTS SUR LE COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE: VECTEURS ORTHONORMÉS U,S.....	112
10- CETTE FORME DE LA MÉTRIQUE EST ASSOCIÉE À UN OBSERVATEUR DE CARTER.....	112
11- QUELQUES VÉRIFICATIONS.....	112
12- INTÉGRATION GLOBALE DE LA MÉTRIQUE TÉTRADIQUE LOCALE DES VECTEURS CANONIQUE.....	113
B- LE FORMALISME DE NEWMANN PENROSE.....	114
1- GÉNÉRALITÉS : RAISON DE CE CHOIX.....	114
2- DÉFINITION DE LA BASE DE VECTEURS DANS LE FORMALISME DE NEWMAN PENROSE.....	115
3- REMARQUES COMPLÉMENTAIRES SUR LE TENSEUR $h(A)(B)$:.....	116
4- COEFFICIENTS DE ROTATION DE RICCI.....	116
5- SCALAIRES OPTIQUES DE LA CLASSIFICATION DE PETROV.....	117
6- SCALAIRES DE WEYL DANS LE FORMALISME DE NEWMAN-PENROSE.....	117
7- MÉTRIQUE EXPRIMÉE EN FONCTION DE LA TÉTRADE DÉFINISSANT LES VECTEURS DE BASE.....	118
8- TENSEUR DE KILLING CONFORME.....	119
9- COORDONNÉES DE LA BASE TÉTRADIQUE EN COORDONNÉES DE BOYER LINDQUIST.....	119
10- VÉRIFICATION DE LA NULLITÉ DES VECTEURS UTILISÉS.....	120
11- NOUVELLE BASE ORTHONORMÉE COMOBILE DÉDUITE DE LA PRÉCÉDENTE.....	120
<i>Relations entre les vecteurs canoniques et vecteurs déduits du formalisme de Newmann Penrose.....</i>	122
12- RELATION ENTRE LES VECTEURS DE LA TÉTRADE NULLE ET CEUX DE LA TÉTRADE COMOBILE.....	123
<i>12-1 Relation entre les vecteurs de base.....</i>	123
<i>12-2 Relation entre les boosts</i>	124
C- MODÈLE DE LA RIVIÈRE DÉDUIT DE LA FORME DE DORAN EN MÉTRIQUE DE KERR..	125
1- LA FORME DE DORAN DE LA MÉTRIQUE DE KERR.....	125
2- LE MODÈLE DE LA RIVIÈRE.....	127
2- 1 GÉNÉRALITÉS.....	127
<i>2-2 Métrique cartésienne de Doran.....</i>	128

<i>2-3 Tétrade de la rivière.....</i>	<i>129</i>
3- CONGRUENCES DE GÉODÉSIQUES	132
3- 1 GÉNÉRALITÉS.....	132
<i>3-2 Calcul de l'équation du transport parallèle en coordonnées cartésiennes globales.....</i>	<i>133</i>
<i>3-3 Calcul de l'équation du transport parallèle dans la base tétradique.....</i>	<i>133</i>
<i>3-4 Application aux trous noirs de Kerr.....</i>	<i>134</i>
4- COMPLÉMENTS SUR LES VECTEURS A, B.....	135
16-CONCLUSION.....	137
17-REMERCIEMENTS :	139
18-ANNEXES :	140
19-RÉFÉRENCES.....	141

1- Introduction

L'étude mathématique des trous noirs statiques, avait révélé, dès 1916, des propriétés bien étranges, qui avaient indigné plus d'un physicien, à commencer par Einstein, et Eddington qui se sont efforcés toute leur vie de démontrer leur inexistence physique. Ce n'était pourtant qu'un avant goût de ce qu'allait révéler l'étude des trous noirs de Kerr et Kerr Newman.

Si on pouvait douter de la réalité physique des trous noirs statiques à symétrie sphérique, la solution de Kerr semble bien, entre autres, correspondre à la description asymptotique du résultat physique de l'effondrement catastrophique d'étoiles massives en fin d'évolution, possédant un moment cinétique non nul, ce qui est le cas général.

Cette solution inclut, en particulier, en plus des caractéristiques déjà révélées par les trous noirs statiques chargés ou non, un « anti univers miroir symétrique », connecté au nôtre, par l'intérieur de la singularité, déformée en anneau par la rotation, une ergosphère et des régions où le « temps » a deux dimensions², permettant des boucles temporelles, ce qui ne va pas sans malmenager la causalité.

A l'autre bout de l'échelle, dans le domaine microscopique, la symétrie entre l'univers et « l'anti univers » révélée par la solution mathématique de Kerr Newman (chargée) offre un modèle « classique » assez surprenant, qui décrit plutôt bien les caractéristiques essentielles des particules élémentaires comme l'électron et leurs antiparticules associées, suggérant que l'antimatière pourrait bien générer un champ gravitationnel répulsif.

Ce rapport propose un tour d'horizon descriptif de ces propriétés caractéristiques. Nous essaierons de trouver une signification physique aux propriétés de ce type de trou noir, par une étude phénoménologique justifiée par le calcul et illustrée par des expériences physiques.

Nous nous intéresserons aux méthodes et nouveaux outils qui ont permis de construire et d'analyser cette solution, en particulier le rôle de l'analyse par les familles de géodésiques suivies par la lumière, révélatrices de symétries cachées qui éclairent entre autres la mystérieuse séparabilité des équations permettant leur résolution, précisent le concept de causalité dans ce type d'espace temps et nous verrons en quoi ils peuvent nous aider à comprendre la nature de cette solution.

Il a fallu attendre presque 50 ans entre la mise en équation des trous noirs statiques à symétrie sphérique (i.e Schwarzschild) et celle stationnaire axisymétrique. Comme on s'en doute, cela n'est pas trivial. La lecture de la publication fondatrice de Kerr en 1963, révèle un contenu plus proche de l'exercice mathématique que de l'exposé d'une solution physique. Nous essaierons de décrypter cet article et d'y apporter quelques éléments de réponse.

Méthodologie et travail effectué

Indépendamment des références bibliographiques citées et incorporées pour permettre la compréhension du rapport, et de quelques résultats classiques connus que j'ai utilisés, l'essentiel du contenu de ce rapport avec ses calculs associés fait partie de mon travail personnel. De même je me suis attaché à essayer d'expliquer « simplement » certains concepts et résultats en essayant de comprendre et décrire les principes généraux qui les sous tendent, et les convergences entre les différents points évoqués.

² La formule est un peu lapidaire pour souligner l'étrangeté du phénomène, il serait plus correct de dire, qu'il peut exister deux coordonnées de type temps.

2-Au commencement : L'article de Kerr

VOLUME 11, NUMBER 5

PHYSICAL REVIEW LETTERS

1 SEPTEMBER 1963

GRAVITATIONAL FIELD OF A SPINNING MASS AS AN EXAMPLE OF ALGEBRAICALLY SPECIAL METRICS

Roy P. Kerr*

University of Texas, Austin, Texas and Aerospace Research Laboratories, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio
(Received 28 July 1963)

Goldberg and Sachs¹ have proved that the algebraically special solutions of Einstein's empty-space field equations are characterized by the existence of a geodesic and shear-free ray congruence, k_{μ} . Among these spaces are the plane-fronted waves and the Robinson-Trautman metrics² for which the congruence has nonvanishing divergence, but is hypersurface orthogonal.

In this note we shall present the class of solutions for which the congruence is diverging, and is not necessarily hypersurface orthogonal. The only previously known example of the general case is the Newman, Unti, and Tamburino metrics,³ which is of Petrov Type D, and possesses a four-dimensional group of isometries.

If we introduce a complex null tetrad (l^* is the complex conjugate of l), with

$$ds^2 = 2l l^* + 2m k,$$

then the coordinate system may be chosen so that

$$l = P(r + i\Delta)dt,$$

$$k = du + 2 \operatorname{Re}(\Omega d\bar{z}),$$

$$m = dr - 2 \operatorname{Re}\{(\bar{r} - i\Delta)\bar{\Omega} + iD\Delta\}d\bar{z} + \left\{r\bar{P}/P + \operatorname{Re}[P^{-2}D(\bar{P} \ln P + \bar{\Omega})] + \frac{m_r r - m_z \Delta}{r^2 + \Delta^2}\right\}k, \quad (1)$$

nonzero divergence. If $m \neq 0$, then there are certain integrability conditions which must be satisfied by Eqs. (2)-(4). These may be solved for m as a function of Ω and its derivatives provided that either Δ or $\bar{\Omega}$ is nonzero. This expression for m may then be substituted back into the field equations giving conditions on Ω and its derivatives, from which further integrability conditions are extracted.

If both Δ and $\bar{\Omega}$ are zero, then we may transform the metric to a coordinate system in which Ω is pure imaginary and $P \neq 1$, with $\bar{\Omega} = \bar{P} = 0$. The field equations then become

$$m = cu + A + iB,$$

where c is a real constant, and

$$P^{-2}\nabla[P^{-2}\nabla(\ln P)] = 2c, \quad \nabla = \partial/\partial\bar{z} \partial\bar{z}^*$$

A , B , and Ω , which are all independent of u and r , are determined by

$$iB = \frac{1}{2}P^{-2}\nabla(P^{-2}\partial\Omega/\partial\bar{z}) - P^{-4}(\partial\Omega/\partial\bar{z})\nabla(\ln P),$$

$$\nabla B = i c \partial\Omega/\partial\bar{z},$$

$$(\partial/\partial\bar{z})(A - iB) = c\Omega,$$

where $\bar{z} = \zeta + i\eta$. If c is zero, then $\partial/\partial u$ is a Killing vector.

Among the solutions of these equations, there is one which is stationary ($c = 0$) and also is axially symmetric. Like the Schwarzschild metric, which it contains, it is Type D. Also, B is zero, and m is a real constant, the Schwarzschild mass. The metric is

$$ds^2 = (r^2 + a^2 \cos^2\theta)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) + 2(du + a \sin^2\theta d\phi) \times (dr + a \sin^2\theta d\phi) - \left(1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2\theta}\right) \times (du + a \sin^2\theta d\phi)^2,$$

where a is a real constant. This may be trans-

formed to an asymptotically flat coordinate system by the transformation

$$D = \partial/\partial\bar{z} - \Omega\partial/\partial u,$$

where ζ is a complex coordinate, a dot denotes differentiation with respect to u , and the operator D is defined by

$$\Delta = \operatorname{Im}(P^{-2}D^*\bar{\Omega}).$$

There are two natural choices that can be made for the coordinate system. Either (A) P can be chosen to be unity, in which case Ω is complex, or (B) Ω can be taken pure imaginary, with P different from unity. In case (A), the field equations are

$$(m - D^*D^*D\Omega) = \partial_u D\Omega, \quad (2)$$

$$\operatorname{Im}(m - D^*D^*D\Omega) = 0, \quad (3)$$

$$D^*m = 3m\bar{\Omega}. \quad (4)$$

The second coordinate system is probably better, but it gives more complicated field equations.

It will be observed that if m is zero then the field equations are integrable. These spaces correspond to the Type-III and null spaces with

237

formed to an asymptotically flat coordinate system by the transformation

$$(r - ia)e^{i\phi} \sin\theta = x + iy, \quad r \cos\theta = z, \quad u = t + r,$$

the metric becoming

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2 + \frac{2mr^3}{r^4 + a^2 z^2} (k)^2, \\ (r^2 + a^2)rk = r^2(xdx + ydy) + ar(xdy - ydx) + (r^2 + a^2)(zdz + rdt). \quad (5)$$

This function r is defined by

$$r^4 - (R^2 - a^2)r^2 - a^2 z^2 = 0, \quad R^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

so that asymptotically $r = R + O(R^{-1})$. In this coordinate system the solution is analytic everywhere, except at $R = a$, $z = 0$.

If we expand the metric in Eq. (5) as a power series in m and a , assuming m to be of order two and a of order one, and compare it with the third-order Einstein-Infeld-Hoffmann approximation for a spinning particle, we find that m is the Schwarzschild mass and ma the angular momentum about the z axis. It has no higher order multipole moments in this approximation. Since there is no invariant definition of the moments in the exact theory, one cannot say what they are, except that they are small. It would be desirable to calculate an interior solution to get more insight into this.

*Supported in part by U. S. Air Force through the Aerospace Research Laboratory of the Office of Aerospace Research.

¹J. N. Goldberg and R. K. Sachs, *Acta Phys. Polon.* **22**, 13 (1962).

²I. Robinson and A. Trautman, *Proc. Roy. Soc. (London)* **A265**, 463 (1961).

³E. Newman, L. Tamburino, and T. Unti (to be published).

L'article n'est pas long, mais comme on peut s'en rendre compte, ce n'est pas vraiment très explicite pour des non spécialistes.

Remarquons qu'alors que cet article est réputé décrire le trou noir en rotation³ de Kerr, le terme trou noir ne figure pas dans l'article.

Pour ce qui est la rotation, Kerr présente sa solution comme stationnaire et axisymétrique, et évoque la rotation pour caractériser les paramètres (a,m) de la métrique qu'il propose, par comparaison à l'approximation à l'ordre 3 avec un corps en rotation en métrique de Schwarzschild.

Ceci dit, après cette mise en appétit, tentons un premier décryptage rapide.

Si la forme est obscure, le propos est plutôt limpide. Kerr cherchait simplement des solutions de l'équation d'Einstein pour des formes de la métrique très simple⁴ :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + l_{\mu}l_{\nu} \quad (2-1-1)$$

Où $\eta_{\mu\nu}$ décrit une métrique plate (de Minkowski) et l est un vecteur nul dans cette métrique. La simplicité apparente de la forme de la solution ainsi décrite cache pourtant une mise en œuvre plutôt technique.

Il faut se rappeler que la solution étant définie dans le vide, et l'espace temps étant caractérisé par sa courbure en tout point, on peut étudier un certain nombre de propriétés du tenseur de Weyl⁵, et classer selon des critères d'invariance en considérant ce tenseur comme un opérateur agissant sur des tenseurs deux fois contravariants (bi vecteurs).

On peut, par un formalisme développé par Petrov (et Pirani) classer le tenseur de Weyl (qui est un tenseur « conforme » c'est-à-dire invariant d'échelle) selon différents types, en fonction du nombre de « valeurs propres » associé à son action sur ces bivecteurs.⁶

Kerr utilise un théorème déjà établi par Goldberg et Sachs⁷ qui montre l'existence d'une congruence nulle sans « anisotropie transversale (shear free) »⁸ dans les espaces temps de type algébrique spécial [55].

Kerr a donc effectué une recherche systématique des solutions dans le vide dont le tenseur métrique est localement la somme d'un tenseur métrique d'espace plat et du produit tensoriel d'un vecteur nul par lui-même.

C'est donc en utilisant les propriétés structurelles du tenseur de Weyl et en élargissant la recherche aux solutions non orthogonales aux congruences (ce qui était original) que Kerr a trouvé une solution stationnaire⁹.

³ Notons que le terme « rotation » pour la source générant le champ pose problème en relativité: En rotation par rapport à quoi ? Il n'y a pas d'espace « absolu » en Relativité. Nous verrons qu'il y a des critères géométriques.

⁴ Cette métrique figurant dans l'article de Kerr, éq.(5) est appelée « forme de Kerr-Schild ». Dans son article, il la dérive d'une autre forme du ds^2 qu'il a préalablement établie qu'on appelle la métrique de Kerr, où la coordonnée r est de type nul, ce qui est naturel compte tenu de son approche par les congruences de géodésiques nulles (lumière) et qui a pour conséquence que le vecteur nul principal (double) correspondant à la géodésique entrante s'écrit simplement $-\partial/\partial r$. Par rapport aux coordonnées de Boyer Lindquist (qui seront établies en 1965) et qui s'en déduisent par un changement de coordonnées, la forme de Kerr correspond aux coordonnées avancées (AKN).

⁵ Dans le vide, le tenseur de Weyl est égal au tenseur de Riemann qui caractérise la courbure de l'espace temps.

⁶ Voir [55] « Classification de Petrov » ou sa traduction annexe 12, pour plus de détails.

⁷ Le théorème de Goldberg et Sachs stipule qu'il existe une congruence de géodésiques nulles, sans distorsion du facteur de forme (shear free), si et seulement si le groupe associé est algébriquement spécial (classification de Petrov Pirani) [55]

⁸ Une coupe « circulaire » perpendiculaire aux géodésiques, reste circulaire, lorsqu'on progresse le long de la congruence dans les espaces temps « algébriquement spéciaux »

⁹ Stationnaire veut dire « qui fait tout le temps la même chose » et statique « qui ne fait rien du tout ». Formellement, un espace temps est dit statique s'il existe un champ de vecteurs de Killing de type temps ∂_t qui est orthogonal aux hypersurfaces de type espace, il est stationnaire si ce champ de vecteurs ∂_t n'est pas orthogonal à ces hypersurfaces de type espace. Géométriquement, de façon générale, si un champ de vecteurs V^μ est orthogonal à un ensemble d'hypersurfaces défini par la relation $f = \text{constante}$, f étant une fonction des coordonnées sur la variété, et si h étant une autre fonction, on peut écrire le vecteur $V_\mu = h \cdot f_{;\mu}$, l'orthogonalité implique que $V_{[\sigma} V_{\nu} ; \mu] = 0$. De façon opérationnelle ceci se traduit simplement par la présence de termes croisés en $dt.d\phi$ dans une métrique stationnaire, et à leur absence dans une métrique statique.

Dans le cas de l'espace temps considéré par Kerr, il a montré que le tenseur de Weyl était partout de type D,¹⁰ c'est-à-dire doublement « dégénéré » (2 racines doubles).

Physiquement, dans l'espace temps original¹¹ à quatre dimensions, cela correspond à une classification par analyse des congruences¹² des géodésiques nulles (les géodésiques suivies par la lumière) dans les différents types d'espace-temps.

On sait qu'on peut définir un espace temps de cette manière, en le « remplissant » de géodésiques, concurremment à sa définition géométrique « classique » qui en définit les points.

Ceci se traduit concrètement par le fait qu'il existe certaines géodésiques particulières des photons (en particulier deux familles, appelées congruences principales nulles, à θ constant, avec k^μ impulsion du photon qui y correspond pour ces deux familles, le signe $\pm$ indiquant les deux directions des géodésiques, entrante et sortante) de paramètres :

$$L_z = a.E.\sin^2\theta, \quad K_c = -a^2E^2\cos^2\theta, \quad k^\theta = 0, \quad k^r = \pm E, \quad k^\phi = aE/\Delta, \quad k^t = (r^2+a^2)E/\Delta \quad (2-1-2)$$

L_z est le moment angulaire axial, E est l'énergie à l'infini, et K_c est la constante de Carter dans la solution paramétrique donnée par B. Carter¹³ [7]. Si on considère le tenseur de Weyl $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ et son dual $C^*_{\alpha\beta\gamma\delta} = \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}C^{\mu\nu}_{\gamma\delta}$, (on applique l'opérateur * de Hodge,¹⁴) alors on a $C_{\alpha\beta\gamma[\delta}k^\beta k^\gamma] = 0$ et $C^*_{\alpha\beta\gamma[\delta}k^\beta k^\gamma] = 0$. [46]

On dispose de deux champs de vecteurs nuls doubles (au lieu de quatre dans le cas standard), chaque champ de vecteurs doubles résulte de la « fusion » de familles de géodésiques de photons, qui sont appelés vecteurs nuls principaux (congruences principales nulles) et qui « tracent » la symétrie de l'espace temps.

On retrouvera cette terminologie dans le cours de l'exposé, et on verra que les bases « tétradiques, e_a^μ » que l'on va définir pour évaluer certains paramètres, vont souvent comporter ces vecteurs nuls principaux, avec la particularité que cette tétrade n'est pas « classique »¹⁵ (ne satisfait pas à la relation $g_{\mu\nu}e_a^\mu e_b^\nu = \eta_{ab}$) et implique quelques aménagements, lors des calculs.

Ce formalisme peu trivial, qui sous tend les symétries de cet espace temps, établi par Newman et Penrose sur leur conviction que c'est la structure des cônes de lumière¹⁶ qui est révélatrice de la structure de cet espace temps, peut expliquer qu'il ait fallu attendre 50 ans avant de trouver la solution.

Mais malgré tout c'est bien l'existence de ces « symétries », quelle que soit la façon de les exploiter, qui a permis de donner une forme analytique générale (Kerr Newman) à cette métrique.

En effet, l'équation d'Einstein est en général non soluble analytiquement, sauf à disposer d'un haut niveau de symétrie, qui permet de la « simplifier ».

Pour commencer notre investigation, il est bon de rappeler quelques éléments fondamentaux.

¹⁰Fait partie des « solutions algébriques spéciales »

¹¹ L'espace des bivecteurs est un espace vectoriel à six dimensions qui se réduit à quatre du fait des symétries du tenseur de Weyl

¹² Voir par exemple [44] annexe F pour la définition et l'utilisation des congruences géodésiques de type temps et lumière.

¹³ On utilise ici la solution en coordonnées de Boyer Lindquist exposée dans [46] p 898-903

¹⁴ Dans un espace à n dimensions l'opérateur * de Hodge « $(*A)_{\mu_1\dots\mu_{n-p}} = (1/p!) \varepsilon^{\nu_1\dots\nu_p}_{\mu_1\dots\mu_{n-p}} A_{\nu_1\dots\nu_p}$ » permet d'associer une (n-p)-forme linéaire à une p-forme.

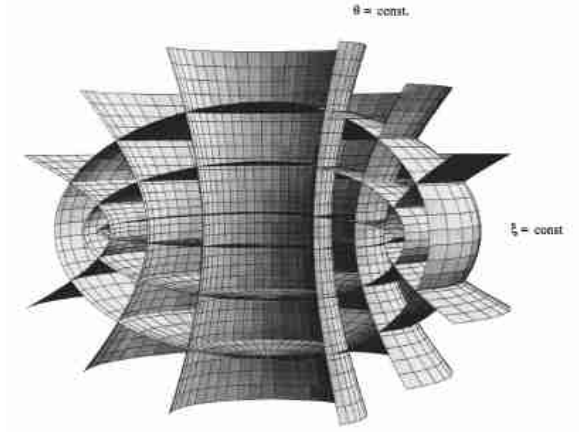
¹⁵ Il s'agit du formalisme de Newman Penrose, décrit en annexe 17, qui s'appuie sur une relation plus générale.

¹⁶ La causalité est directement liée à la structure des cônes de lumière, la relation impliquant la causalité est de nature « conforme »

3-Pour y comprendre quelque chose :

1- Métrique de Kerr Newman : présentation générale

Rappelons la forme de cette métrique, dans les coordonnées obloïdes de Boyer Lindquist, représentées ci-dessous [48] qui sont celles qui sont le plus utilisées.



Dans ces coordonnées, avec m = masse, Q = charge, a = spin du Trou Noir,¹⁷ l'élément métrique s'écrit :

$$ds^2 = \rho^2 \Delta^{-1} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^{-2} \sin^2 \theta [a dt - (r^2 + a^2) d\phi]^2 - \rho^{-2} \Delta [dt - a \sin^2 \theta d\phi]^2 \quad (3-1-1)$$

Le tenseur électromagnétique vaut :

$$F = 2e\rho^{-4}(r^2 - a^2 \cos^2 \theta) dr \wedge [dt - a \sin^2 \theta d\phi] - 4e\rho^{-4} ar \cos \theta \sin \theta d\theta \wedge [a dt - (r^2 + a^2) d\phi] \quad (3-1-2)$$

Avec $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$, $\Delta = r^2 - 2mr + a^2 + e^2$ (3-1-3)

B. Carter [7] a trouvé la solution analytique, sous forme paramétrique, de l'équation géodésique pour une particule de test, d'énergie E , de masse μ , de charge e et de moment angulaire L_z qui s'écrit dans ces coordonnées:

$$\begin{aligned} \rho^2 d\theta/d\lambda &= \sqrt{\Theta}, \\ \rho^2 dr/d\lambda &= \sqrt{R}, \\ \rho^2 d\phi/d\lambda &= -(aE - L_z/\sin^2 \theta) + (a/\Delta)P, \\ \rho^2 dt/d\lambda &= -a(aE \sin^2 \theta - L_z) + (r^2 + a^2)\Delta^{-1}P. \end{aligned} \quad (3-1-4)$$

avec $\Theta = K_c - \cos^2 \theta [a^2(m^2 - E^2) + L_z^2/\sin^2 \theta]$
 $P = E(r^2 + a^2) - L_z a - eQr$
 $R = P^2 - \Delta [m^2 r^2 + K_c + (L_z - aE)^2]$ (3-1-5)

Cette solution est liée à la découverte d'un quatrième invariant « surprise » [7], la constante de Carter :

$$K_c = p_\theta^2 + \cos^2 \theta [a^2(m^2 - E^2) + L_z^2/\sin^2 \theta] \quad (3-1-6)$$

On utilise souvent K liée à la constante de Carter.

$$K = K_c + (L_z - aE)^2 \quad (3-1-7)$$

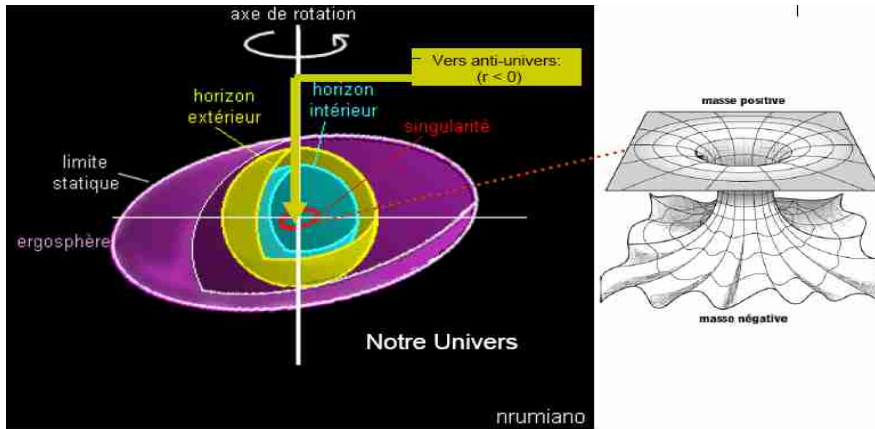
La constante de Carter a permis la séparation en θ et r de l'équation Hamiltonienne. Associée aux trois autres invariants (vecteur de Killing de type temps, de moment angulaire et invariant métrique) ceci a permis de trouver une solution. Sa nature sera discutée dans un autre chapitre

¹⁷ Nous précisons la nature de ces paramètres dans le paragraphe suivant. Le signe de $M^2 - (a^2 + Q^2)$ conditionne l'existence d'horizons dans la solution. Notons que dans cette relation M, a , et Q sont exprimés en unités « géométriques »: $G = c = 4\pi\epsilon_0 = 1$.

Dans les coordonnées de Kerr (utilisées par B. Carter dans [7] pour cette solution), il faut remplacer les deux dernières équations par :

$$\rho^2 d\tilde{V}/d\lambda = -a(aE \sin^2\theta - L_z) + (r^2 + a^2)\Delta^{-1}(\sqrt{R} + P),$$

$$\rho^2 d\tilde{\phi}/d\lambda = -(aE - L_z/\sin^2\theta) + a\Delta^{-1}(\sqrt{R} + P).$$



Ecorché d'un trou noir de Kerr [50] (vue d'artiste)

Pour une présentation rapide de ses caractéristiques essentielles, voir [51]. Pour une description rapide des orbites et trajectoires, voir [7], pour une étude détaillée voir [38].

Rappelons que la solution de Kerr Newman est la solution unique, générale, axisymétrique, stationnaire, dans le vide des équations de la Relativité générale. Ce résultat a été généralisé au vide électromagnétique sous certaines conditions de symétrie, généralement satisfaites, lorsque la source du tenseur énergie impulsion électromagnétique est libre, voir 1B de l'article de B. Carter [7].

Soulignons aussi, que dans ces solutions, c'est la présence des effets de la rotation qui confèrent aux solutions de Kerr leur originalité et leur importance.

En particulier c'est la rotation qui permet de prolonger les géodésiques vers les r négatifs (ce qui n'était pas possible avec les solutions statiques), puisque, en métrique de Kerr, à la différence des métriques statiques, $r = 0$ n'est pas une singularité : La singularité ponctuelle dans les solutions statiques est ici « déformée » en un anneau, ce qui permet de « passer » à l'intérieur, en passant par la valeur $r = 0$, sans heurter la singularité qui est caractérisée par $r = 0$ et $\theta = \pi/2$. Ceci va nous permettre d'étudier les « symétries » $r \rightarrow -r$, dans un contexte où ces deux parties de l'espace sont connectées (une géodésique où ligne d'univers de type temps peut s'étendre de $r = -\infty$ à $r = +\infty$).

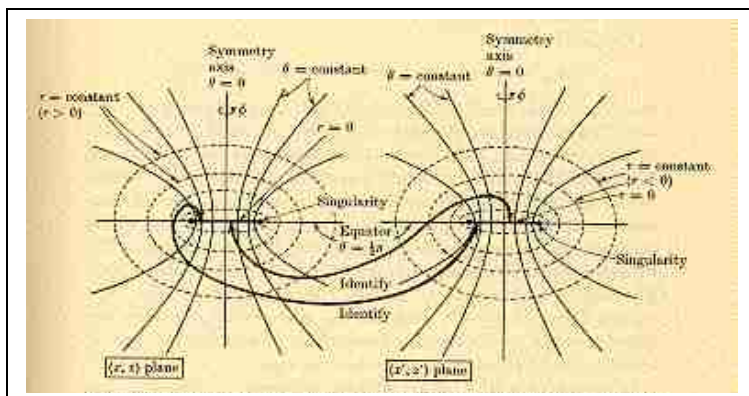


Figure 1 : L'extension maximale de la solution de Kerr s'obtient en identifiant le dessus du disque $x^2 + y^2 < a^2$, $z=0$ dans l'hyperplan (x,y,z) avec le dessous du disque correspondant dans l'hyperplan (x',y',z') et vice versa. La figure montre la section plane pour $y=0$, $y'=0$ de ces hyperplans. En bouclant deux fois autour de la singularité à $x^2 + y^2 = a^2$, $z=0$, la première fois on passe de l'hyperplan (x,y,z) où $r > 0$ à l'hyperplan (x',y',z') pour lequel $r < 0$ et la deuxième fois on retourne à l'hyperplan de départ où $r > 0$.

2- La charge, la masse (énergie), le spin en Relativité Générale

Nous savons qu'un trou noir de Kerr-Newman, solution la plus générale des équations d'Einstein pour un système stationnaire est défini par seulement trois paramètres : La masse m , la charge e , et le spin a . On va se placer ici dans l'hypothèse d'espaces temps stationnaires asymptotiquement plats. La valeur de ces paramètres est alors définie pour un observateur à l'infini par le flux d'un vecteur caractéristique du paramètre à travers une sphère à l'infini.

2-1 Cas de la charge

Ceci est défini dans [44] p.248-249 ou sa traduction annexe 7.

2-2 Cas de la masse (énergie), espaces temps stationnaires

Définissons précisément la signification de la masse « gravitationnelle » ou de façon équivalente de l'énergie, qui génère le champ.

Il est instructif de voir, comment on s'affranchit du caractère « non local » de la gravitation dans les espaces asymptotiquement plats stationnaires, en considérant la conservation d'un flux traversant une sphère à l'infini (plat).

En effet « l'énergie gravitationnelle » est décrite par un pseudo tenseur et non pas un tenseur : cf [ref 47] p364-370.

On se place donc dans le cas d'un espace asymptotiquement plat, stationnaire et on cherche une « quantité » conservée dans le temps (d'où la stationnarité requise), qu'on va considérer comme étant « l'énergie ».

On va s'inspirer de la méthode définie pour la charge, reste à définir l'objet dont on va intégrer le flux à l'infini. A priori on serait tenté d'associer le tenseur énergie impulsion, qui est un tenseur et non plus un vecteur, à cette grandeur.

En fait, cette énergie, conformément au théorème de Noether associant la conservation de l'énergie à l'invariance dans le temps, se définit non pas à partir du tenseur énergie impulsion (comme on pourrait le croire), mais à partir du 4-vecteur de Killing de type temps, caractérisant une « symétrie » (invariance par rapport au temps), de la géométrie de l'espace, ce qui après tout est bien naturel, la Relativité générale étant une théorie géométrique de la gravitation.

La masse gravitationnelle est définie à partir de ses effets (la géométrie générée), et l'énergie totale du système (en RG) en résulte par voie de conséquence! Alors :

$$E = 1/4\pi G \int_{\partial\Sigma} d^2x \sqrt{\gamma_{(2)}} \cdot \eta_{\mu} \cdot \sigma_{\nu} K^{\nu}{}_{;\mu} \quad (3-2-2-1)$$

Cette expression est l'intégrale de Komar associée au vecteur de Killing K^{ν} de type temps, elle est associée à l'énergie totale du système dans un espace temps stationnaire.

On voit qu'elle représente le flux de la dérivée covariante du vecteur de Killing traversant une sphère à l'infini. Pour les détails du calcul voir [44] §6.4 ou sa traduction annexe 7.

2-3 Cas du spin

Si nous avons un vecteur de Killing $R = \partial_{\phi}$, associé à l'invariance par rotation (c'est le cas), alors la transposition est immédiate, voir [44] p. 253-254 ou sa traduction annexe 7.

3- Conditions d'énergie en Relativité Générale

Rappelons que la notion d'énergie, claire en espace plat (composante temporelle du vecteur énergie impulsion), l'est nettement moins en espace courbe. Au vu de l'équation d'Einstein, il semble qu'on

puisse donner n'importe quelle valeur au tenseur énergie impulsion, l'équation d'Einstein servant alors à déterminer une métrique qui y correspond. Il existe cependant un théorème d'énergie positive qui contraint ces possibilités pour se raccrocher à des situations physiques « raisonnables ». Pour un rappel de ces conditions voir [44] p. 174-177

4- Energie de la particule de test dans un champ gravitationnel

Pendant que nous parlons des énergies, précisons aussi comment on définit l'énergie de la particule de test dans un champ gravitationnel. J'ai rencontré trois définitions différentes (mais non contradictoire) de cette notion.

1- Energie d'une particule de quadri impulsion p^μ mesurée par un observateur de quadrivitesse U^μ . Elle est définie par $E = -p^\mu U_\mu$.

Cela correspond à l'énergie inertielle/cinétique de la particule, le signe « - » est là pour respecter la convention de signe (énergie positive).

2- Energie d'une particule de quadri impulsion p^μ définie par $E = -p^\mu K_\mu$, où K_μ est le vecteur de Killing de type temps dans un espace temps stationnaire.

Ceci correspond à l'énergie « totale » de la particule, incluant l'énergie « potentielle » du champ gravitationnel.

A noter que la notion d'énergie potentielle gravitationnelle n'est pas toujours bien définie, mais l'énergie totale l'est dans les espaces temps possédant un vecteur de Killing de type temps.

C'est cette énergie qui est conservée le long des géodésiques. Cette définition se décline en deux versions :

2-1 Energie totale par unité de masse

2-2 Energie totale de la particule

Dans le cas où la particule est soumise à un champ gravitationnel et à un champ non gravitationnel (électromagnétique par exemple) dérivant d'un quadri potentiel, ce qui a été dit reste vrai en général, sauf que la définition du quadri vecteur impulsion prend en compte ce champ additionnel.

5- Horizons de Killing et implications

Les trous noirs sont caractérisés par le fait qu'on peut y entrer, mais qu'on ne peut pas retourner d'où on vient (billet aller simple). Donc leur caractéristique la plus importante, n'est pas la singularité au centre mais son horizon des événements à sa frontière.

Pour en savoir plus voir [44] p.238-248 ou sa traduction annexe 19.

4- Energie négative en Relativité Générale

1- Définition de la masse négative en Relativité générale, (Bondi- 1957)

Même si certains arguments associés à la masse négative sont plutôt élémentaires et bien connus, il est cependant intéressant de bien préciser ce que nous entendons sous ce vocable.

De prime abord, sans se référer à une théorie, nous pouvons distinguer trois types de masses définies par la mesure qu'on en fait : masse inertielle, masse gravitationnelle passive, masse gravitationnelle active.

La masse inertielle est le coefficient qui intervient (et qui est défini par) dans la seconde loi de Newton ($f = m.a$), la force « f » devant être de nature non gravitationnelle (électromagnétique par exemple) pour s'assurer de l'indépendance des masses.

La masse passive est celle sur laquelle le champ gravitationnel agit (couplage avec le champ, la « charge » gravitationnelle), définie par $f = -m.gradV$.

La masse active est celle qui est la source du champ gravitationnel et est donc celle qui intervient dans l'équation de Poisson et la loi de Gauss.

En physique Newtonienne la loi de l'action et de la réaction implique l'égalité des masses gravitationnelles actives et passives, mais leur égalité avec la masse inertielle est un constat empirique distinct.

Le signe de ces masses peut prendre n'importe quelle valeur et c'est un autre fait empirique qu'on le considère ou qu'il soit toujours positif.

Si on ne prend pas en compte ce dernier fait, alors quatre cas sont possibles.

- (i) Toutes les masses sont positives : c'est le cas classique.
- (ii) La masse inertielle est négative, les masses gravitationnelles sont positives. Un corps fait de telle matière va se comporter à l'inverse du cas standard lorsque soumis à toutes les forces quelles que soient leur nature, mais va générer des forces gravitationnelles classiques.
- (iii) Masse inertielle positive, masses gravitationnelles négatives. Dans ce cas, les forces non gravitationnelles vont avoir le comportement habituel, mais si on considère les interactions gravitationnelles entre ces masses et les masses de type (i), c'est-à-dire positives, on a une loi de Coulomb « inversée ». Les masses de même nature (deux masses positives entre elles ou deux masses négatives entre elles) s'attirent, les masses de nature différentes (une masse négative en interaction avec une masse positive) se repoussent
- (iv) Toutes les masses sont négatives. On va arriver à une combinaison de (ii) et (iii). Un corps fait de cette matière va se comporter à l'inverse du cas classique pour les forces non gravitationnelles, va se comporter comme la matière ordinaire vis-à-vis des forces gravitationnelles, mais va générer des champs gravitationnels répulsifs.

En Relativité le principe d'équivalence est inhérent à la théorie, donc le rapport entre la masse inertielle et la masse gravitationnelle passive est le même pour tous les corps.

La relation entre la masse passive et la masse active n'est pas contrainte par quoi que ce soit comme la troisième loi de Newton, car ceci impliquerait des intégrales sur des régions étendues de l'espace temps qui ne possèdent pas le caractère tensoriel requis.

La masse gravitationnelle active apparaît, comme une constante d'intégration, pour la première fois dans la solution de Schwarzschild.

Si cette constante est considérée positive, alors les particules de test, vont, en première approximation, suivre des orbites Newtoniennes correspondantes à l'attraction gravitationnelle du corps central. Si, cependant, on prend cette constante négative, les particules de test vont décrire des orbites qui correspondent à un cas « Newtonien mais répulsif. Remarquons que dans le premier cas, tous les corps sont attirés, dans le second tous les corps sont repoussés.

Pour en savoir plus voir [3] ou sa traduction annexe 6.

2- Energie négative dans un champ gravitationnel : Le cas de l'ergosphère

Ceci va nous permettre de bien préciser le concept d'énergie négative en Relativité générale. Dans l'ergosphère, les quatre coordonnées sont de type « espace »¹⁸, ce qui a pour conséquence que pour que le temps propre soit positif (trajectoire de type temps) il faut nécessairement que $d\phi$ soit non nul, et de même signe que dt pour que le produit croisé intervenant dans la métrique, compte tenu de la valeur de son coefficient dans cette zone soit de type temps. Autrement dit, on tourne impérativement dans le sens de rotation du trou noir. C'est une illustration de l'entraînement de référentiel, poussé à l'extrême. L'ergosurface est souvent appelée « limite de staticité » pour cette raison.

Bien qu'on entre dans l'ergosphère¹⁹, caractéristique des trous noirs en rotation, avec une énergie positive, il est possible de perdre de l'énergie pour être (temporairement) dans une situation d'énergie négative et avant de tomber sous l'horizon, regagner de l'énergie pour de nouveau être dans une situation d'énergie positive, s'en échapper et retourner d'où on vient.

Bien que ce soit une expérience de pensée, sous réserve de disposer de la technologie nécessaire, cette expérience serait réalisable physiquement.

2-1 Trajectoires où l'énergie est négative dans l'ergosphère (cas TN de Kerr)

Il peut exister dans l'ergosphère des géodésiques d'énergie négative comme l'indique le calcul de l'énergie d'une particule de masse m , comme expliqué ci-dessous. Cela est lié à la définition de l'énergie dans une solution stationnaire

2-2 Mouvement géodésique dans l'ergosphère

Considérons les quantités conservées associées aux vecteurs de Killing, $\zeta^\mu = \partial_t$ et $\eta^\mu = \partial_\phi$. Pour notre propos, nous nous limiterons au cas des particules massives, dont nous considérerons la quadri Impulsion.

$$p^\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (4-2-2-1)$$

Où m est la masse au repos de la particule : Appliquons la condition de conservation à l'énergie réelle et au moment cinétique de la particule²⁰.

$$E = -\zeta_\mu p^\mu = m \left(1 - \frac{2GMr}{\rho^2} \right) \frac{dt}{d\tau} + \frac{2mGMa}{\rho^2} \sin^2 \theta \frac{d\phi}{d\tau} \quad (4-2-2)$$

et

$$L = \eta_\mu p^\mu = -\frac{2mGMa}{\rho^2} \sin^2 \theta \frac{dt}{d\tau} + \frac{m(r^2 + a^2)^2 - m\Delta a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \sin^2 \theta \frac{d\phi}{d\tau} \quad (4-2-2-3)$$

Le signe moins de la définition de E est justifié par le fait qu'à l'infini ζ^μ et p^μ sont de type temps, donc leur produit scalaire est négatif, et que nous voulons une énergie positive.

A l'intérieur de l'ergosphère cependant, ζ^μ devient de type espace on peut imaginer une particule pour qui :

¹⁸ Voir chapitre 9-9 pour une définition précise.

¹⁹ Voir [51] pour plus de détails sur l'ergosphère. Rappelons qu'elle est délimitée à l'extérieur par une ergosurface qui n'est pas un horizon de Killing, bien que le champ de vecteurs de Killing ∂_t s'annule, car cette hypersurface est de type temps et pas de type nul. A noter que la métrique « spatiale » $dl^2 = (\rho^2/\Delta)dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + [\Delta \sin^2 \theta / (1 - 2MGr/\rho^2)] d\phi^2$ est singulière sur l'ergosurface [47] p.424.

²⁰ Nous utilisons ici la convention $(-, +, +, +)$ pour la métrique

$$E = -\zeta_\mu p^\mu < 0 .$$

(4-2-2-

4)

2-3 Exemple numérique de conditions entre $d\Phi/dt$ et r pour que l'énergie soit négative dans l'ergosphère²¹ dans le plan équatorial

Plaçons-nous dans le plan équatorial, là où l'ergosphère est la plus étendue.

Pour $\theta = \pi/2$ ($\sin\theta = 1$, $\cos\theta = 0$), l'équation (4-2-2-2) devient

$$E = m(1 - \frac{2GM}{r}) \frac{dt}{d\tau} + a(\frac{2GM}{r}) \frac{d\Phi}{d\tau} \quad (4-2-3-1)$$

Qu'on peut écrire

$$E = m(1 - \frac{2GM}{r}) \frac{dt}{d\tau} + a(\frac{2GM}{r}) \frac{d\Phi}{dt} \frac{dt}{d\tau} \quad (4-2-3-2)$$

$$E = m \frac{dt}{d\tau} \left[(1 - \frac{2GM}{r}) + a(\frac{2GM}{r^2}) \frac{d\Phi}{dt} \right] \quad (4-2-3-3)$$

$$\text{Avec la contrainte}^{22} : \quad -1 < r \frac{d\Phi}{dt} < 1 \quad (4-2-3-4)$$

C'est à dire que la vitesse tangentielle de la particule de test est inférieure à la vitesse de la lumière, dans le sens de la rotation ou dans l'autre sens, au moins à l'extérieur de l'ergosphère.

Si

$$m \left[(1 - \frac{2GM}{r}) \frac{dt}{d\tau} + a(\frac{2GM}{r}) \frac{d\Phi}{dt} \frac{dt}{d\tau} \right] < 0 \quad (4-2-3-5)$$

Alors l'énergie est négative

De surcroît pour être dans l'ergosphère équatoriale il faut que $r < 2GM$, alors on voit que le coefficient de dt est négatif (il s'annule à l'horizon de Killing, délimitant l'ergosphère).

On suppose m et $r > 0$,

$E < 0$ implique

$$(1 - \frac{2GM}{r}) + a(\frac{2GM}{r}) \frac{d\Phi}{dt} < 0 \quad (4-2-3-6)$$

Soit

$$r \frac{d\Phi}{dt} < (1 - \frac{r}{2GM}) \frac{r}{a} \quad (4-2-3-7)$$

Soit

$$\frac{d\Phi}{dt} < (1 - \frac{r}{2GM}) \frac{1}{a} \quad (4-2-3-8)$$

Dans l'ergosphère équatoriale $r < 2GM$ donc le terme de droite est positif. Il peut y avoir des solutions positives pour $d\Phi/dt$, respectant cette inégalité. Ceci est une condition nécessaire, car on a

²¹ En fait il y a deux ergosurfaces, qui limitent l'ergosphère, voir plus loin dans l'analyse des hypersurfaces remarquables, on s'intéresse ici en général à l'ergosurface limite externe de l'ergosphère.

²² En fait cette valeur est un majorant de la contrainte

vu par ailleurs que dans l'ergosphère, compte tenu de l'entraînement du référentiel $d\Phi/dt$ ne pouvait être que positif (ou nul pour la lumière), voir encadré ci dessous.

Mais cela est il suffisant ? L'existence de solution est soumise au respect d'une autre contrainte quantitative qui est liée à l'entraînement de référentiel.

Définition de la vitesse angulaire du trou noir

Commençons par nous intéresser à la vitesse angulaire du trou. Evidemment, la définition conventionnelle doit être modifiée, avant d'appliquer quoi que ce soit à quelque chose d'aussi abstrait que la métrique de l'espace temps. Considérons le sort d'un photon, émis dans la direction Φ , à un rayon r dans le plan équatorial ($\theta = \pi/2$) d'un trou noir de Kerr. A l'instant d'émission son impulsion ne comporte pas de composantes dans les directions r et θ , cette condition s'écrit :

$$ds^2 = 0 = g_{tt}dt^2 + g_{t\phi}(dt d\phi + d\phi dt) + g_{\phi\phi}d\phi^2 . \quad (4-2-3-9)$$

Si on résout, on obtient

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{-g_{t\phi} \pm \sqrt{g_{t\phi}^2 - g_{tt} g_{\phi\phi}}}{g_{\phi\phi}} \quad (4-2-3-10)$$

Par exemple, si nous évaluons l'expression sur l'hypersurface externe de l'ergosphère de la métrique de Kerr, nous avons $g_{tt} = 0$ et les deux solutions sont :

$$\frac{d\phi}{dt} = 0 , \quad \frac{d\phi}{dt} = \frac{2a}{(2GM)^2 + a^2} .$$

La solution non nulle a le même signe que a . Nous pouvons l'interpréter comme le fait que le photon tourne dans le même sens que le trou noir. La solution zéro montre que le photon à contre courant est immobile dans ce système de coordonnées. (Ce n'est pas la solution complète de la trajectoire, seulement le constat que la vitesse instantanée est nulle).

L'équation (4-2-3-10), montre qu'à l'infini $r.d\Phi/dt \rightarrow \pm I$, pour une géodésique lumière.

Une étude détaillée de la vitesse du trou noir sera présentée au chapitre 9-1-8

Il existe des géodésiques satisfaisant à la relation (4-2-3-8) qui ont une énergie négative²³.

Sans faire la démonstration référencée ci-dessus, on peut montrer simplement (en utilisant la définition de la vitesse angulaire du trou noir, dans l'encadré ci dessus) que de telles géodésiques impliquent que la particule soit en contre rotation (son moment angulaire L_z doit être négatif) du fait de l'entraînement de l'espace. Pour montrer cela, on évalue (pour un TN de Kerr critique):

$$\Delta (d\Phi/dt) = d\Phi/dt_{(\text{énergie négative})} - d\Phi/dt_{(\text{minimum})} \text{ avec}$$

²³ Dans [40] p 367-368, S. Chandrasekhar démontre que des géodésiques à énergie négative ne peuvent exister que pour des particules en «contre rotation» ($L_z < 0$). Ici nous proposons une autre démonstration de la propriété.

$d\Phi/dt$ (énergie négative) : Vitesse angulaire maximum pour géodésique à énergie négative.

$d\Phi/dt$ (minimum) : Vitesse d'entraînement du référentiel.

Si $\Delta (d\Phi/dt)$ est positif, (remarquons que dans ce cas la particule matérielle, va alors « plus vite que la lumière »), la condition (4-2-3-8) peut être satisfaite

La figure 1 ci-dessous qui représente $\Delta (d\Phi/dt)$ en fonction de r dans l'ergosphère ($1 < r < 2$) pour la contre rotation et la co-rotation, pour un trou noir de Kerr critique, montre que la relation (8) ne peut vérifiée dans l'ergosphère que pour des particules en contre rotation.

Ceci s'explique simplement. Le seul cas possible où une particule matérielle peut aller « plus vite que la lumière », c'est à « contre courant ». Etant à contre courant c'est « le nageur le plus lent » qui a la vitesse la plus élevée, dans le sens du courant, par rapport à la berge, cela résulte de l'effet d'entraînement du référentiel. Cet effet d'entraînement a d'autres conséquences non triviales comme nous le verrons dans l'étude de la machine temporelle.

Figure 1 : On a représenté $\Delta (d\Phi/dt)$ en fonction de r . Pour un TN de Kerr critique, on voit que $\Delta (d\Phi/dt)$ n'est positif dans l'ergosphère que pour des particules en contre rotation. Ceci n'autorise une énergie négative qu'en contre rotation) [54]

2-4 Les géodésiques à énergie négative plongent vers l'horizon

Y a-t-il des orbites stables à énergie négatives confinées dans l'ergosphère? Dans [43] p.116-120, par exemple on montre que si la dernière orbite stable en co-rotation se trouve bien dans l'ergosphère, asymptotiquement proche de l'horizon, la dernière orbite stable en contre rotation, se trouve bien à l'extérieur de l'ergosphère dans le cas particulier d'un Trou noir de Kerr critique (cas le plus favorable).

Donc comme il n'y a pas d'orbites stables en contre rotation dans l'ergosphère et qu'une géodésique à énergie négative est soit confinée dans l'ergosphère, soit vouée à plonger sous l'horizon du trou noir, nous en concluons que toutes les géodésiques à énergie négative plongent vers l'horizon du trou noir.

Rappelons que cet effet d'entraînement de référentiel est sensible également à l'extérieur de l'ergosphère, même s'il n'a pas le caractère critique qu'on lui connaît à l'intérieur. Ceci doit être pris en compte pour interpréter correctement certaines propriétés.

2-5 Sommes nous plus léger sur une géodésique à énergie négative ?

C'est évidemment une boutade, car sur une géodésique on est en chute libre et mis à part les effets de marées la réponse est « on ne voit pas de différence avec une situation sur une autre géodésique ».

Cependant, la lecture de l'exposé du procédé de Penrose, nous suggère de faire l'expérience (de pensée) suivante.

On se dirige dans une fusée (la navigation en jetant des rochers, demande un entraînement particulier) vers un Trou noir de Kerr, en laissant un observateur sur Terre. Les fusées sont des engins plus simples à manier qui comme elles fonctionnent par éjection de matière et réaction, suivent le même principe donc cela devrait marcher dans notre exemple.

On supposera le Trou noir suffisamment gros (10 millions de masses solaires par exemple), pour que les effets de marées à l'approche du Trou noir soient supportables. Pour la rotation, on la supposera telle que l'ergosphère soit suffisamment vaste pour pouvoir voyager un peu dedans (avec cette taille de trou noir cela devrait aller).

La fusée (très puissante, avec beaucoup de carburant) avec ses passagers plonge (moteur coupé, en vol inertiel dans l'ergosphère sur une géodésique d'énergie positive dans le sens de la rotation.

Puis orientant la fusée, on allume le moteur et on s'arrange que les produits éjectés soient dans le sens de la rotation, de façon à par réaction, faire « perdre » de l'énergie à la fusée de manière et jusqu'à ce que son énergie soit négative et là on coupe le moteur.

Nous y voilà ! Nous avons une énergie « négative ». Cela change t'il quelque chose ? Localement sans doute pas. On ne se rend sans doute compte de rien. On est, sur une orbite à énergie négative, en chute libre vers l'horizon du trou noir, situation qui risque de se révéler inconfortable à court terme. En fait l'énergie négative en Relativité, comme on l'a vu, s'évalue par rapport à l'observateur resté sur Terre. Avant de penser au retour, faisons une petite digression.

2-6 Quelle signification physique donner à l'«énergie négative »

Si on essaie d'interpréter comment cette énergie peut être négative (pour l'observateur « extérieur »), il faut se rappeler que la métrique de Kerr est écrite indiscutablement « mathématiquement » dans une forme stationnaire, condition nécessaire pour qu'on puisse parler de conservation de l'énergie.

Mais quand on regarde de plus près « par rapport à quoi on est stationnaire (la variable t) » on s'aperçoit qu'à l'extérieur de l'ergosphère cette variable t représente bien un temps au sens usuel (celui de l'observateur distant), mais dès qu'on franchit la frontière de l'ergosphère, dans cette forme de la métrique, elle devient de type espace pour l'observateur à l'extérieur. Ceci peut aider à comprendre pourquoi, l'énergie devient négative pour lui, son collègue est sur une trajectoire de type espace dans le système de coordonnées attaché à l'observateur extérieur. Il y a d'ailleurs une singularité de coordonnées « spatiale » sur l'ergosurface [47], le « dl^2 » diverge.

Ce point nous rappelle que la RG est orientée « observateur » comme rappelé dans l'introduction, et que les différents observateurs ne voient pas les mêmes parties de l'espace-temps et en tout cas pas de la même manière, même si on peut associer une réalité physique à cet espace temps dans sa globalité, sa géométrie intrinsèque par exemple.

Pour les conditions que le voyageur ressent « localement » on utilise en général, une description inertielle tétradique²⁴ du référentiel (qui décrit vraiment ce qui se passe pour lui dans ces coordonnées « physiques »)

Préoccupons nous du retour maintenant

L'expérience est intéressante, mais il faut songer au retour, avant que l'irréparable se produise (franchir l'horizon) réorientant la fusée de manière à ce que produits éjectés soient cette fois dans le sens de la contre rotation sur des trajectoires à énergie négatives. Nous gagnons de l'énergie (et cela est amplifié par le procédé de Penrose) et lorsque celle ci redevient positive, nous avons la possibilité de quitter l'ergosphère et de raconter notre expérience. On peut raisonnablement supposer que le centre de masse du système (fusée + produits éjectés) doit continuer à se trouver sur l'orbite inertielle d'entrée sur l'ergosphère.

2-7 Forces de marées et accélération subies par le voyageur

L'autre point qui n'a pas été étudié est l'ampleur des forces de marée (liées à l'équation de déviation géodésique²⁵, le fait que les géodésiques se rapprochent quand on s'approche d'un objet massif, exerçant des contraintes sur un corps rigide) et des accélérations qui ont été nécessaires pour réaliser le voyage. Pour les forces de marée, ceci s'évalue dans le référentiel localement inertiel. La valeur générale du tenseur de Weyl, qui sert à les calculer, a été calculée dans [46] .

2-8 Principe du calcul du stress lié aux forces de marées

La méthode pour évaluer l'effet sur un objet physique de ces forces de marées est exposée dans [46] p860-861.

Pour un corps humain par exemple, on va le modéliser par un parallélépipède homogène de longueur $l = 1,8m$ qu'on va orienter dans le sens radial et de section carrée $w \times w = 0,2m \times 0,2m$, de poids $m = 75kg$.

Les contraintes vont s'exercer par rapport au plan contenant le centre de masse (la rupture s'opérerait à cet endroit pour un corps homogène) qui est une section carrée à mi hauteur. Si le corps était constitué de particules « libres » la forme du parallélépipède changerait (s'allongerait dans le sens radial et subirait une compression dans le sens transversal).

Pour conserver sa forme, une force opposée doit être appliquée (musculaire, rigidité des parties solides, ...)

Considérons la contrainte longitudinale, pour laquelle $x^\mu = h$.

On considère un élément de volume, formé d'une tranche fine de parallélépipède, de masse dm à une distance h du centre de masse, elle serait accélérée conformément à l'équation de déviation géodésique de :

$$a = D^2 x^\mu / d\tau^2 = - R^\mu_{\nu\alpha\delta} x^\alpha ,$$

²⁴ Voir annexe sur la représentation tétradique

²⁵ Voir annexe sur la déviation géodésique.

Pour empêcher cette accélération, les « muscles » du voyageur (ou les forces de cohésion du corps) doivent exercer une force antagoniste :

$$dF = a.dm$$

Cette force contribue à l'annulation du stress dans toute la section plane perpendiculaire à h , passant par le centre de masse. La force totale est la somme des forces relatives à tous les éléments de masse au dessus de ce plan (qui est égale par symétrie à ceux en dessous si h est petit devant la distance au trou noir).

$$F = \int_0^{l/2} a.dm$$

C'est cette formule qui va être utilisée.

Remarquons que cette force est relative à toute la section. Le stress va être cette force divisée par la surface de la section (w^2), ce qui fait que le stress a les dimensions d'une pression en N/m^2 (ici elle sera négative du fait qu'il s'agit d'une elongation).

En résistance des matériaux, on mesure la résistance des matériaux en force admissible jusqu'à la rupture par unité de section. (L'acier va résister à des contraintes de 40 à 150 kg/mm² par exemple) ;

Le même raisonnement s'applique pour le stress transversal. A noter que comme souvent il est plus faible, c'est le stress longitudinal qui est critique. Donc il n'est pas utile de calculer ce dernier (juste vérifier qu'il est bien inférieur).

En fait il n'y a que deux composantes à calculer dans ce référentiel : La composante longitudinale et la composante transversale : elles sont données respectivement par [37]:

$$T_{\text{long}} = -\frac{ml}{8w^2M^2} \frac{1}{(\bar{r}^2 + \bar{a}^2)^3} [2\bar{r}(\bar{r}^2 - 3\bar{a}^2) - \bar{Q}(3\bar{r}^2 - \bar{a}^2)],$$

$$T_{\text{trans}} = \frac{m}{8lM^2} \frac{1}{(\bar{r}^2 + \bar{a}^2)^3} [\bar{r}(\bar{r}^2 - 3\bar{a}^2) - \bar{Q}(\bar{r}^2 - \bar{a}^2)].$$

en posant

$$\begin{aligned} r &= M\bar{r}, \\ a &= M\bar{a}, \\ Q &= M\bar{Q}. \end{aligned}$$

Par ailleurs m est la masse, l la longueur dans la direction radiale, et w la largeur et la profondeur (supposées identiques) de l'objet subissant le stress.

Posons $Q = 0$, prenons un trou noir critique $a = GM$ (ce sont ceux qui ont l'ergosphère la plus étendue à l'équateur, elle s'étend jusqu'à $2GM$), de 10^7 masses solaires = $2 \cdot 10^{37}$ kg, comme d'habitude. Plaçons nous juste sur l'intérieur de l'ergosphère : $r = 2GM - \epsilon$.

Les variables surlignées sont sans dimensions

Pour un vaisseau spatial prenons $l = 100\text{m}$, $m = 100$ tonnes, $w = 100\text{m}$, avec les facteurs dimensionnels en crochets rajoutés pour respecter l'équation aux dimensions.

$$-\{100.10^5.(4(4-3) / 8.10^4.4.10^{74})5^3\}x [(G^{-2})(c^6)] = -0,2.10^{-2} \text{ N/m}^2$$

ce qui est un stress totalement négligeable et tout à fait supportable pour le corps humain (remarquons le signe -). L'autre étant du même ordre de grandeur, inutile de le calculer.

Pour ce qui est des accélérations, hors voyage inertiel, pour réaliser un tel voyage le calcul n'est pas simple, mais on peut trouver une illustration qualitative qui devrait être significative.

Si on se réfère à [43] p.116-120, on voit qu'il existe des orbites stables, si on se situe dans le plan équatorial et dans le sens de rotation d'un trou noir critique, pratiquement jusqu'à $r = GM$, en fait $r = GM + \varepsilon$. On est largement dans l'ergosphère puisqu'elle s'étend jusqu'à $2GM$.

On pourra donc se placer sur une géodésique (on sera en chute libre, donc pas d'accélération, seulement des forces de marées) qui pénètre à l'intérieur de l'ergosphère, avec une énergie positive minimale .

Alors, depuis cette géodésique on peut faire une « mini incursion » dans le domaine des « énergies négatives » en décélérant (de façon contrôlée, jusqu'à atteindre une énergie légèrement négative, en éjectant les gaz dans le sens de la rotation²⁶) ce qui nous fait « tomber » vers l'horizon du trou noir. Rapidement, il convient, après avoir goûté les délices de cette énergie négative, « d'accélérer » (en éjectant les gaz dans le sens contraire de la rotation), pour acquérir de nouveau une énergie positive²⁷ et franchir à nouveau l'ergosurface et retourner dans notre monde.

Pour une description complémentaire de l'expérience, les effets de marée subis cf. [46] p. 860-862.

²⁶ Ce faisant, on fournit de l'énergie de rotation au trou noir, on l'accélère.

²⁷ Cette fois ci on prélève de l'énergie de rotation au trou noir, on le ralentit.

5- Facteur gyromagnétique, en métrique de Kerr Newman

Les équations font apparaître un facteur gyromagnétique de deux ²⁸ pour la métrique de Kerr Newman, ce qui n'est pas trivial, car dans un contexte de mécanique classique il vaut un ²⁹, et qui avait beaucoup surpris à l'époque, tant cela paraissait mystérieux. Rappelons qu'en théorie classique pour des corps identiques chargés en mouvement stationnaire on définit :

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} \sum_i e_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \quad \vec{J} = \sum_i M_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \quad \vec{\mu} = \frac{q}{2m} \vec{J} \quad \mu = g \frac{q}{2m} J \quad (5-0-1)$$

Avec μ moment magnétique, J moment cinétique de ce même système et g facteur gyromagnétique défini de sorte qu'il vaille « 1 » dans ce cas classique.

Rappelons aussi, que dans ces espaces temps stationnaires asymptotiquement plats, les champs électriques et magnétiques (statiques) s'évaluent pour un observateur « à l'infini ». La remarque de B. Carter, qui s'appuie sur la forme des équations est assez générale, elle nécessite d'être étayée par quelques calculs. Essayons de justifier physiquement comment ce facteur gyromagnétique peut valoir 2 en calculant la valeur asymptotique du champ électrique et du champ magnétique générés par le trou noir de Kerr Newman.

1- Calcul à partir du potentiel électromagnétique

En Relativité Générale « classique » le Trou noir ne rayonne pas, donc les seuls champs qu'on va lui associer sont statiques. Il s'agit d'un champ électrique de type « électrostatique » et un champ magnétique « statique » (un dipôle).

Il existe différentes manières d'aborder le problème. Il n'est pas douteux qu'un tel phénomène résulte du couplage entre l'équation d'Einstein et les équations de Maxwell, et qu'on pourrait tirer cette relation directement des deux équations (ce que nous vérifierons). Nous partirons d'une donnée plus amont, le potentiel électromagnétique.

Soit A_i le quadrivecteur potentiel électromagnétique qui va intervenir dans le Lagrangien.

$$L = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + \varepsilon A_\mu \dot{x}^\mu \quad (5-1-1)$$

La forme la plus simple pour A est: [7]

$$A = e \cdot \rho^{-2} \cdot r (dt - a \sin^2 \theta \cdot d\phi) \quad (5-1-2)$$

Où e est la charge du trou noir et ε la charge d'une particule de test.

Et le tenseur électromagnétique F en dérive en dérive par:

$$F = 2dA \quad (5-1-3)$$

ce qui en termes de composantes donne :

$$F_{\mu\nu} = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \quad (5-1-4)$$

Appliqué à notre cas très symétrique cela donne quatre composantes non nulles du champ:

$$(\partial_t A_r - \partial_r A_t) = F_{tr} = -F_{rt} = -e \cdot (r^2 - a^2 \cos^2 \theta) \cdot \rho^{-4}$$

$$(\partial_\theta A_t - \partial_t A_\theta) = F_{t\theta} = -F_{\theta t} = -2a^2 \cdot r \cdot e \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \rho^{-4}$$

$$(\partial_\phi A_r - \partial_r A_\phi) = F_{r\phi} = -F_{\phi r} = e \cdot a \cdot \sin^2 \theta \cdot (r^2 - a^2 \cos^2 \theta) \cdot \rho^{-4}$$

$$(\partial_\theta A_\phi - \partial_\phi A_\theta) = F_{\theta\phi} = -F_{\phi\theta} = 2e \cdot a \cdot r \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot (r^2 + a^2) \cdot \rho^{-4}$$

Vérification du calcul à partir du tenseur électromagnétique

On peut vérifier, en utilisant l'équation (11) de l'article de B. Carter [réf 7],

²⁸ Comme pour l'électron, mais celui-ci défini en mécanique quantique fait appel à des « spineurs » représentation de dimension deux du groupe des rotations, ce qui n'est pas le cas ici.

²⁹ Voir le début de [10] pour un rappel.

$$ds^2 = \rho^2 \Delta^{-1} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^{-2} \sin^2 \theta [a d\tilde{t} - (r^2 + a^2) d\tilde{\phi}]^2 - \rho^{-2} \Delta [d\tilde{t} - a \sin^2 \theta d\tilde{\phi}]^2, \quad (10)$$

$$F = 2e\rho^{-4} (r^2 - a^2 \cos^2 \theta) dr \wedge [d\tilde{t} - a \sin^2 \theta d\tilde{\phi}] - 4e\rho^{-4} ar \cos \theta \sin \theta d\theta \wedge [a d\tilde{t} - (r^2 + a^2) d\tilde{\phi}]. \quad (11)$$

Qu'on obtient bien la même chose³⁰.

(On calcule les coefficients associés aux éléments $dt \wedge dr$, $d\theta \wedge dt$, $d\Phi \wedge dr$, $d\theta \wedge d\Phi$ en développant le produit, qu'on identifie F^{tr} , $F^{\theta t}$, etc...).

2-Tenseur électromagnétique et champ électrique et magnétique « classique »

Pour faire la comparaison avec l'expression classique de champ électrique E et du champ magnétique B , rappelons qu'on peut écrire le tenseur électromagnétique sous la forme:

$$F_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} 0 & -Er & -E\theta & -E\Phi \\ Er & 0 & B\Phi & -B\theta \\ E\theta & -B\Phi & 0 & Br \\ E\Phi & B\theta & Br & 0 \end{vmatrix} \quad (5-2-1)$$

3- Limite asymptotique à l'infini : on trouve $g = 2$.

Calculons la valeur limite pour $r \rightarrow \infty$, le terme en ρ^2 se simplifie et $\rightarrow r^2$.

La composante temporelle (champ électrostatique) devient:

$$\partial_t A_r - \partial_r A_t = -e/r^2 = F_{tr} = -F_{rt} = -E_r \quad (5-3-1)$$

On retrouve bien l'équation, $E_r = e/r^2$, associée au champ électrostatique d'une charge e (la composante $F_{\theta t}$ est en $1/r^3$ et est négligeable à l'infini devant F_{tr}).

Pour le champ magnétique (composantes spatiales) calculons le pour $\theta = \pi/2$ (on se place dans le plan équatorial).

$$\begin{aligned} \partial_\Phi A_r - \partial_r A_\Phi &= e.a.\sin^2 \theta / r = F_{\Phi r} = -F_{r\Phi} = -B_\theta = e.a./r^2 \\ \partial_\theta A_\Phi - \partial_\Phi A_\theta &= 2e.a.r.\sin \theta.\cos \theta = F_{\theta\Phi} = -F_{\Phi\theta} = B_r = 0 \end{aligned} \quad (5-1-7)$$

Le moment magnétique $\mu = e.a$ est donné par la seule composante non nulle du champ magnétique : B_θ (dont le champ magnétique qu'il génère est en $1/r^2$)

Remarquons que cette composante est bien parallèle à l'axe de symétrie (dans le plan $\theta = \pi/2$, B_θ est perpendiculaire à ce plan et est donc bien la composante du champ magnétique qui nous intéresse. En évaluant le facteur gyromagnétique « g » par la formule (5-0-1).

$$\mu = g.e.J/2m \rightarrow g = \mu.2m/J.e \rightarrow g = ea.2m/ma.e = 2 \quad (5-1-8)$$

Avec $J = m.a$ (en unités naturelles).

4- Explication physique de ce facteur gyromagnétique de deux

Ce point a intrigué de nombreux auteurs [11], [12], et [10] qui l'ont interprété par un effet du principe de Mach. Dans ce dernier article (Cohen, Tiommo et Wald), on considère une coquille massive chargée tournant lentement uniformément. Le rapport charge sur masse est supposé faible.

³⁰ Notons un facteur 2, lié à la forme de (11) qui décrit les produits non orientés des différentielles (ex: $dt \wedge dr = F^{tr} - F^{rt}$).

Les auteurs ont montré que dans le cas où le corps chargé est très massif, les effets de la courbure relativiste de l'espace temps qu'il génère deviennent importants. Alors le facteur gyromagnétique de la coquille chargée n'est plus de « 1 » comme en mécanique classique. Il dépend de la masse et du rayon de la coquille et que lorsque partant d'une masse faible, elle tend vers son rayon de Schwarzschild, le facteur gyromagnétique varie de « 1 » jusqu'à asymptotiquement « 2 » rejoignant les résultats de la métrique de Kerr (et ceux d'une particule de Dirac : $g = 2$), comme montré sur la figure ci dessous, empruntée à [10].

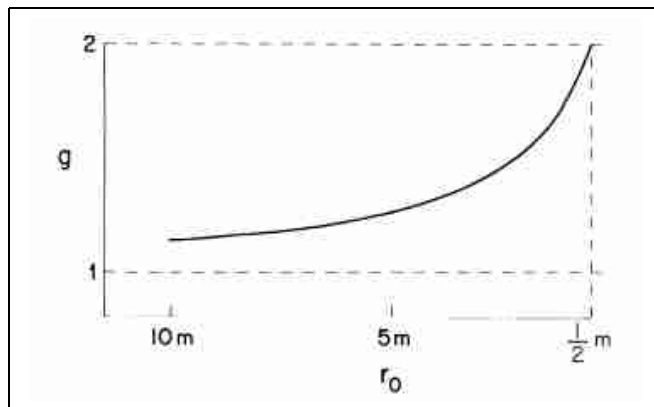


Figure 1 : Facteur gyromagnétique en fonction de r_0 (coordonnée radiale isotrope) pour un corps chargé en rotation lente. Pour $r_0 \gg m$, g approche la valeur classique de 1, mais quand la coquille approche son rayon de Schwarzschild $m/r_0 \rightarrow \frac{1}{2}$ le facteur gyromagnétique tend vers 2.

Ce résultat est assez convainquant physiquement, car on voit que quand on considère une coquille de paramètre de densité très faible on obtient bien le résultat classique $g = 1$.

Mais au fur et à mesure qu'on augmente la masse, à rayon et vitesse de rotation constants le facteur évolue jusqu'à arriver à 2 dans le cas où on atteint le rayon de Schwarzschild. Pourtant, on se place toujours dans le contexte de la métrique de Schwarzschild (et de rotation lente pour qu'on ait le droit de l'utiliser), mais on arrive aux mêmes conclusions (pour cet effet) que ceux de la métrique de Kerr.

Dans ce même article, on étudie également, le cas où on place une charge électrique ponctuelle et un dipôle magnétique au centre d'une coquille massive non chargée en rotation lente. Cette fois, on montre que lorsque la masse tend vers son rayon de Schwarzschild, on retrouve également les résultats de la métrique de Kerr.

6- Symétries de la métrique Kerr: Matière et Antimatière?

La métrique étant singulière pour $r=0$ et $\theta = \pi/2$ (les deux conditions doivent être réunies simultanément) et non pas pour $r=0$ seulement, comme dans la métrique de Schwarzschild, (ce qui faisait que quand $r=0$ on heurtait la singularité à tout coup), des lignes d'univers dans la zone où $r > 0$, peuvent se prolonger en passant par $r=0$, à des valeurs de $r < 0$ (sauf si $\theta = \pi/2$). C'est-à-dire que les géodésiques et trajectoires qui atteignent $r=0$, hors du plan équatorial peuvent s'étendre de $+\infty$ à $-\infty$. Cela ouvre des perspectives très intéressantes.

1-Symétrie formelle des équations

On peut constater, de façon évidente, que la forme de la métrique de Kerr [7], dans le système de coordonnées de Boyer Lindquist,

$$ds^2 = \rho^2 \Delta^{-1} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^{-2} \sin^2 \theta [a d\tilde{t} - (r^2 + a^2) d\tilde{\phi}]^2 - \rho^{-2} \Delta [d\tilde{t} - a \sin^2 \theta d\tilde{\phi}]^2, \quad (10)$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 - 2mr + a^2 + e^2$$

est invariante par une transformation simultanée de $r \rightarrow -r$ et $m \rightarrow -m$, du fait que m n'apparaît dans la métrique (10) que dans Δ , couplé à r sous forme de produits « $m.r$ ». Les autres termes en r de la métrique sont insensibles à la transformation de $r \rightarrow -r$, car ils sont tous sous forme quadratique.

Le tenseur électromagnétique:

$$F = 2ep^{-4}(r^2 - a^2 \cos^2 \theta) dr \wedge [d\tilde{t} - a \sin^2 \theta d\tilde{\phi}] - 4ep^{-4} ar \cos \theta \sin \theta d\theta \wedge [a d\tilde{t} - (r^2 + a^2) d\tilde{\phi}]. \quad (11)$$

est invariant par une transformation simultanée de $r \rightarrow -r$ et $e \rightarrow -e$ du fait que e est couplé à r par des produits « $e.r$ » et « $e.dr$ », les autres termes en r étant insensibles à la transformation de $r \rightarrow -r$, étant tous des formes quadratiques en r .

Il faut que les deux conditions soient satisfaites, puisque la métrique de Kerr Newman couple les équations d'Einstein avec celles du champ électromagnétique.

L'invariance de la forme $F_{\mu\nu}$ fait intervenir le changement de signe de $r \rightarrow (-r)$ et de $dr \rightarrow d(-r) = -dr$. L'élément différentiel de la coordonnée qui est présent sous forme non quadratique dans (11) participe à la symétrie, ce qui n'était pas le cas pour la masse. Ceci assure la symétrie de la phénoménologie par rapport à $r=0$ pour le champ électromagnétique.

C'est le tenseur énergie impulsion électromagnétique $T_{\mu\nu}$ qui intervient dans l'équation d'Einstein, et non pas le tenseur électromagnétique $F_{\mu\nu}$. Ce tenseur $T_{\mu\nu} = -(1/4\pi)(F_{\mu\rho}F_{\nu}^{\rho} - (1/4)g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma})$ construit à partir du tenseur électromagnétique est symétrique alors que le tenseur $F_{\mu\nu}$ est antisymétrique.

Alors que le tenseur $F_{\mu\nu}$ est associé aux équations de Maxwell et caractérise l'interaction électromagnétique, le tenseur énergie impulsion $T_{\mu\nu}$ caractérise la contribution à la « courbure » de l'espace temps de « l'énergie » électromagnétique, c'est-à-dire sa « masse gravitationnelle électromagnétique ». C'est lui qui intervient dans l'équation géodésique pour une particule de test neutre, et on voit sur son expression ci-dessous que, à la différence de $F_{\mu\nu}$, il n'y a pas de produits $(dr.e)$, mais que des produits faisant intervenir e^2 , par exemple $(mr.e^2)$. Ceci, va briser la symétrie ($r, e \leftrightarrow -r, -e$).³¹

³¹ On peut aussi faire cette remarque sur la métrique (qui caractérise la géométrie de la solution des espaces temps de Kerr Newman) : La charge n'intervient que dans le terme Δ et est toujours sous forme quadratique.

2- Etude phénoménologique par l'équation du mouvement géodésique axial

Illustrons plus concrètement la propriété en considérant le mouvement géodésique d'une particule neutre dans de telles conditions.

Nous allons utiliser l'équation géodésique axiale³² dans cette métrique pour notre étude, voir [52] (eq. 23) pour son établissement.

3-Symétrie entre le sous espace ($r > 0$) et celui ($r < 0$)

L'équation géodésique axiale pour une particule de test neutre (6-3-1), ci après, va nous permettre (sans qu'il soit nécessaire de la résoudre) d'étudier cette symétrie et montrer la symétrie du mouvement dans les régions $r > 0$ et $r < 0$.

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\frac{GM r^2}{(a^2 + r^2)^2} + \frac{c^2 e^2 r}{(a^2 + r^2)^2} + \frac{GM a^2}{(a^2 + r^2)^2} \quad (6-3-1)$$

Avec e = charge électrique du trou noir, les autres notations sont habituelles

Comme le dénominateur des termes de droite est le même, on peut faire l'étude en comparant les numérateurs.

Cas $r > 0$

On voit que pour $M > 0$, la quadri-accélération, $d^2 r/d\tau^2$ (C'est l'accélération « ressentie » par l'observateur qui fait intervenir une dérivée par rapport au temps, qui se confond avec le temps propre, car on se place bien dans le référentiel local où l'observateur est instantanément au repos), est « attractive » à grande distance, le premier terme du membre de droite de l'équation ($-GM r^2/(a^2 + r^2)^2$) étant dominant à grande distance.

Par contre à courte distance, ce sont les deux autres termes du membre de droite de l'équation qui sont dominants, d'abord la charge électrique (qui varie en $c^2 e^2 r/(a^2 + r^2)^2$ et puis le spin qui est en $GM a^2/(a^2 + r^2)^2$.

Ces termes sont positifs, donc vont entraîner une répulsivité

Ce dernier point est d'ailleurs surprenant, car étant sur l'axe, on aurait pu considérer que l'effet du spin est nul.

Cas $r < 0$.

Sous la transformation $r \rightarrow -r$, le premier terme du membre de droite est conservé, le deuxième s'inverse et le troisième est conservé.

Explicitons cela en inversant le sens de l'axe des r puisque on va, par symétrie, s'intéresser au comportement d'une particule de test, en prenant la singularité ($r = 0$) comme origine et comme direction celle qui s'éloigne de la singularité (vers les r de plus en plus négatifs).

4- Action de la masse du trou noir.

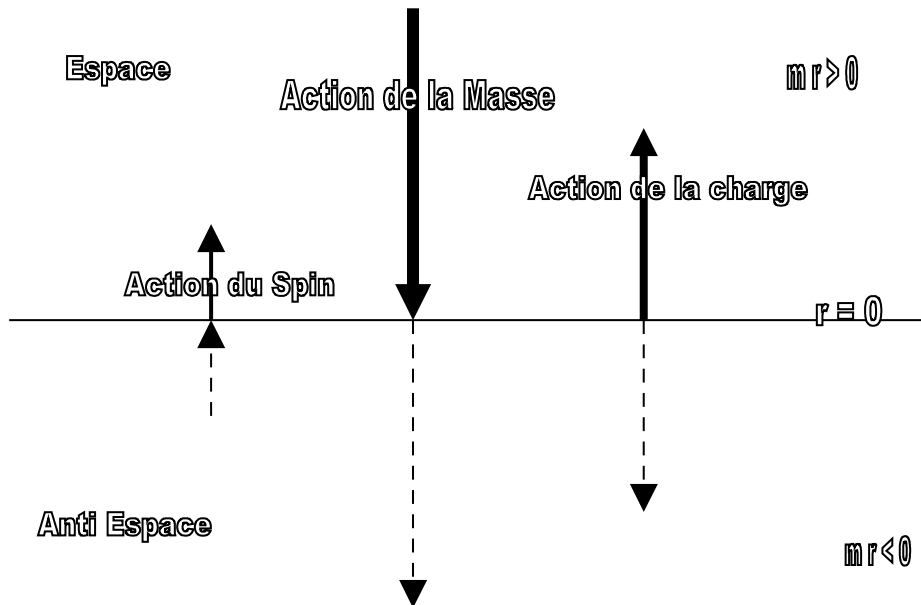
On voit que l'action liée à la masse s'inverse avec ces conventions

Dans ces conditions on voit qu'à grande distance comme c'est l'action de la masse qui domine, (vers les r très négatifs) l'effet gravitationnel (total) est répulsif et asymptotiquement symétrique de celui de $r > 0$ à grande distance, comme la forme des équations l'indiquaient, le terme lié à la masse étant répulsif dès que $r < 0$ et étant dominant à grande distance.

³² L'équation axiale est moins caractéristique de la solution de Kerr que l'équation équatoriale mais cette dernière ne s'intègre pas analytiquement et son étude nécessiterait une étude numérique qui sort du cadre de ce mémoire. Nous verrons cependant que l'équation axiale, pour simple qu'elle soit, nous réservera quelques surprises!

Le terme en e^2 reste répulsif, (la symétrie n'est pas parfaite, dans le cas chargé) alors que le terme en a^2 devient attractif, mais ces termes ne sont, en général, importants qu'à courte distance.

Pour résumer, avec les conventions de référentiels considérés tout s'inverse sauf l'action de la charge électrique (à courte portée, que nous allons expliciter), comme schématisé sur la figure ci dessous.



Comme la « masse » gravitationnelle est définie par une intégrale à l'infini, on peut négliger les autres contributions d'ordre supérieur.

On peut donc dire qu'on a une phénoménologie de masse négative (au sens de Bondi) ce qui confirme bien ce que le formalisme nous indiquait.

5-Action du Spin du trou noir.

Le spin s'inverse naturellement par symétrie spatiale (comme pour la parité P).

Equation géodésique équatoriale

Pour mieux caractériser le spin, il faudrait étudier les orbites « équatoriales », plus complexes, dont l'équation géodésique dans la solution de Kerr Newman est donnée ci-dessous.

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \frac{c^2}{2} \left(\frac{a^2 + r^2 \alpha}{r^2} \right) - \frac{c^2}{2} \frac{a^2 \gamma^2}{r^2} - \frac{c^2}{2} \left(\frac{1 - \alpha}{r^2} \right) \left(a\gamma - \frac{l}{c} \right)^2 + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{\gamma^2 c^2}{2} = 0 \quad (6-5-1)$$

Avec les notations suivantes

$$\alpha = 1 - \frac{r_0}{r} + \frac{e^2}{r^2}$$

l est le moment angulaire de la particule.

$$r_0 = 2GM/c^2$$

γ est une constante appelée paramètre d'énergie relié à l'énergie ε de la particule (qu'on trouve dans d'autres ouvrages cf [43]) par la relation $\gamma^2 = (\varepsilon^2 - c^4)/c^4$

On général on écrit cette équation sous la forme :

$$\frac{1}{2} (dr/d\tau)^2 + V_{eff}(r) = (\varepsilon^2 - c^4)/2c^2 \quad (6-5-2)$$

Dans [43] par exemple, pour le cas non chargé (trou noir de Kerr), le potentiel effectif $V_{eff}(r)$ de l'équation géodésique dans le plan équatorial s'écrit :

$$V_{eff}(r) = -GM/r + [l^2 - a^2(\varepsilon^2/c^2 - c^2)]/2r^2 - [GM(l - a.\varepsilon/c)^2]/c^2.r^3 \quad (6-5-3)$$

On peut vérifier que ces expressions sont identiques. Cette équation est utilisée pour déterminer les orbites circulaires qui dépendent de l comme dans la solution de Schwarzschild, mais aussi de l'énergie ε de la particule (couplage entre l et ε dû à la solution).

Dans le cas d'une particule en chute libre radiale depuis l'infini, sans vitesse initiale $\varepsilon = c^2$, ni moment angulaire initial $l = 0$, l'expression (6-5-3) se simplifie en:

$$V_{eff}(r) = -GM(r^2 + a^2)/r^3$$

et (6-5-2) s'écrit:

$$\frac{1}{2} (dr/d\tau)^2 = GM(r^2 + a^2)/r^3$$

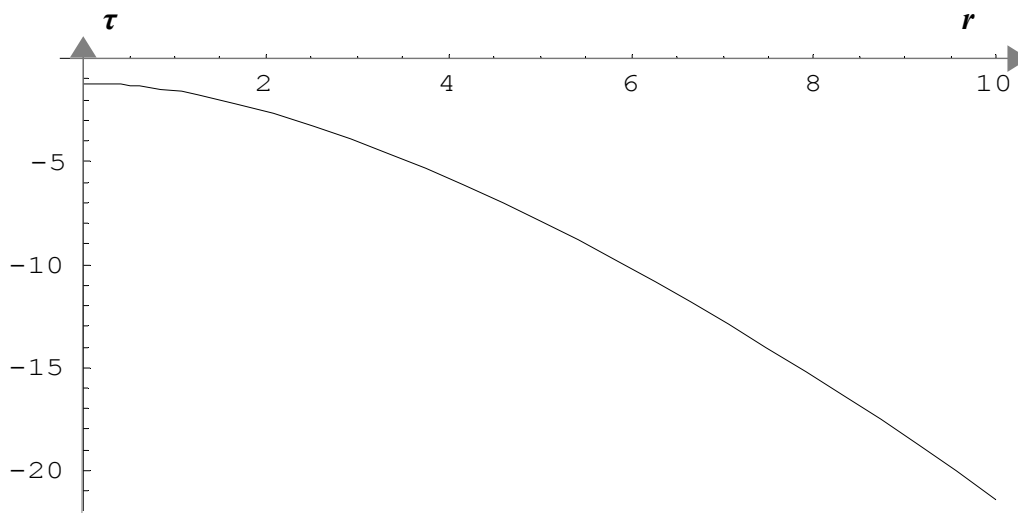
Pour un trou noir critique en posant ($a = GM = l$), on obtient:

$$\frac{1}{2} (dr/d\tau)^2 = (r^2 + l)/r^3 \rightarrow d\tau = -[r^3 / 2(r^2 + l)]^{1/2} dr$$

Dont l'intégrale $\tau(r)$ n'est pas évidente puisqu'elle fait intervenir des fonctions elliptiques ³³:

$$\tau(r) = - \frac{\frac{\sqrt{r^3(1+r^2)}}{r^{3/2}} \left(\frac{4\sqrt{r}}{21} + \frac{2r^{5/2}}{7} \right) - \frac{4(-1)^{1/4} \sqrt{1-\frac{i}{r}} \sqrt{1+\frac{i}{r}} \sqrt{r^3(1+r^2)} \text{EllipticF}\left[i \text{ArcSinh}\left[\frac{(-1)^{1/4}}{\sqrt{r}}\right], -1\right]}{21\sqrt{r}(1+r^2)}}{\sqrt{2}}$$

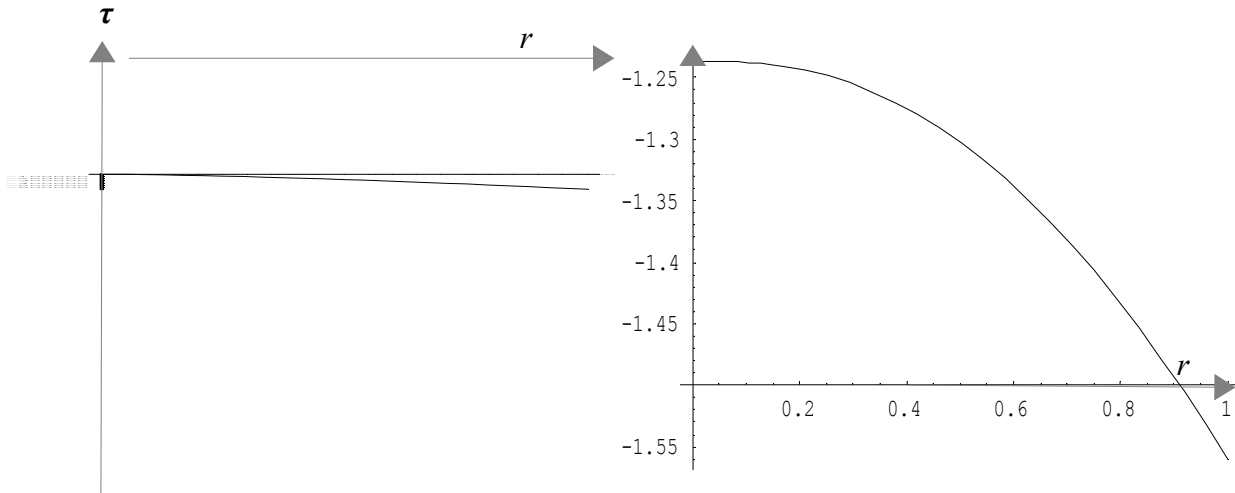
La courbe $\tau(r)$ correspondante est représentée graphiquement ci dessous³⁴.



³³ L'intégrale est donnée par mathématique 4 par la fonction: vitesse = Integrate [Sqrt[(r^3)/((r^2)+1)],1]

³⁴ Les 3 courbes sont tracées par mathematica 4 pour $0 < r < 10$, $0 < r < 10\,000$, $0 < r < 1$ pour différentes échelles.

L'équation $(dr/d\tau) \rightarrow 0$ quand $r \rightarrow \infty$, ce qui est bien conforme aux hypothèses, par ailleurs $(dr/d\tau) \rightarrow \infty$, quand $r \rightarrow 0$. Un tracé à différentes échelles illustre ces propriétés.



Si on dérive la fonction $f(r) = (dr/d\tau)$, pour chercher un extremum, on obtient: $f'(r) = \{[r^5 \cdot (r^2+1)]^{-1/2}\} \{r^2 + 3\}$, fonction qui ne s'annule qu'à l'infini, comme la représentation graphique le confirme.

Il est paradoxal qu'une particule matérielle lâchée sans vitesse ni moment angulaire initiaux sur l'axe de symétrie (là où l'effet de la rotation semble nul) n'atteint pas l'hypersurface définie par $r = 0$, alors que la même particule lâchée dans le plan équatorial (là où l'effet de la rotation semble maximum) sans vitesse ni moment angulaire initiaux atteint la singularité à $r = 0$!

6- Le cas particulier de la charge du Trou noir

Si dans le cas d'un trou noir de Kerr la situation est symétrique pour cette phénoménologie, on remarque que la situation n'est pas « symétrique » pour un trou noir de Kerr Newman, du fait du comportement particulier de l'énergie de charge électrique où comme nous l'avons signalé la symétrie est brisée du fait que le paramètre de charge e n'est présent que sous forme quadratique (e^2) dans le tenseur énergie impulsion électromagnétique, donc insensible au renversement $e \rightarrow -e$. L'étude détaillée va montrer que la présence d'une charge électrique couplée au spin va générer une dissymétrie par rapport à $r = 0$.

Ceci se manifeste dans l'extension de la machine temporelle qui s'étend dans la région où $r > 0$, et par le déplacement des extrema des pics de potentiel (cf chapitre 6-9-2). Ceci résulte du fait que la charge n'intervient dans la métrique que dans $\Delta = r^2 - 2GMr + a^2 + e^2$, alors que les termes liés aux coordonnées « obloïdes » font intervenir des termes ρ^2 en $r^2 + a^2 \cos^2 \theta$. Reste à interpréter physiquement cette phénoménologie pas triviale.

7-Etude détaillée du mouvement sur une géodésique axiale

Nous avons tiré quelques conclusions d'une étude sommaire d'une géodésique axiale. Il est particulièrement intéressant d'aller plus loin dans l'analyse pour mettre en lumière un certain nombre de pathologies critiques de ces espaces temps. Qualitativement nous avons vu que dans le cas normal ($r > 0$), une particule d'une certaine énergie qui part de loin en direction du centre de l'anneau, sur l'axe de symétrie, est accélérée d'abord par le champ de gravitation du trou noir (on est à grande distance), puis la répulsion à proximité de la singularité devenant plus importante que l'attraction, elle est repoussée de plus en plus à l'approche de la singularité, ce qui réduit sa vitesse, (voir équation (23) et peut lui faire

rebrousser chemin. Supposons que son énergie soit suffisante (nous allons préciser cela) pour passer à travers l'anneau délimité par la singularité.³⁵

Elle a passé donc à travers l'anneau délimité par la singularité, dans l'autre demi espace. Lorsqu'elle est à proximité de l'anneau, la particule de test sortante de l'intérieur de l'anneau délimité par la singularité est tout d'abord freinée par l'énergie de « rotation » dominante à très courte portée (en $\approx 1/r^4$). Si son énergie est suffisante pour qu'elle s'éloigne suffisamment de la singularité pour arriver à atteindre le point où l'action combinée de l'énergie de la charge (répulsive en $\approx 1/r^3$) et de la masse (en $1/r^2$) devienne prépondérante alors la particule va pouvoir s'éloigner vers l'infini, l'énergie de masse, (en $1/r^2$) devenant prépondérante à partir d'une distance dont on donnera une évaluation dans la suite du document.

7-1 Calcul des paramètres du mouvement

Penchons nous maintenant sur le mouvement géodésique, pour une particule non chargée. Notre approche peut être simplifiée en considérant les quantités conservées associées aux vecteurs de Killing, $\zeta^\mu = \partial_t$ et $\eta^\mu = \partial_\phi$. Pour notre propos, nous nous limiterons au cas des particules massives, dont nous considérerons la quadri impulsion p^μ . Soit m la masse de la particule et M, a, Q les paramètres de masse, spin et charge du trou noir.

Appliquons la condition de conservation de l'énergie totale pour une géodésique axiale ($\theta = 0$).

Comme sur l'axe $d\phi = 0$, l'expression générale s'écrit :

$$e = - \zeta_\mu p^\mu = m [1 - (2GMr - Q^2)/r^2] (dt/d\tau) \quad (6-7-1-1)$$

Le signe moins de la définition de E est justifié par le fait qu'à l'infini et ζ^μ et p^μ sont de type temps, donc leur produit scalaire est négatif, et que nous voulons une énergie positive. Ici, pour la solution axiale, nous avons $\theta, \phi = \text{constante}$ (en fait la coordonnée ϕ est dégénérée sur l'axe mais nous savons que cette dégénérescence est purement liée aux coordonnées sphériques, un changement de coordonnées permet de l'éviter). De toute façon la quantité conservée L_z est nulle (contient le facteur multiplicatif $\sin^2\theta$ qui est nul).

On a donc :

$$U^\theta \text{ et } U^\phi = 0.$$

En suivant la méthode du cours de Relativité Générale (5.6) de [48], mais en posant $c=1$ et e l'énergie de la particule telle qu'elle serait mesurée par un observateur à l'infini (incluant son énergie de masse au repos, car on est en relativité).

$$e = m(1 - [2GMr - Q^2]/r^2 + a^2). dt/d\tau = m(1 - [2GMr - Q^2]/r^2 + a^2). U^t$$

Soit :
$$U^t = e/m(r^2 + a^2 - [2GMr - Q^2]/r^2 + a^2) = e(r^2 + a^2)/m(r^2 + a^2 - [2GMr - Q^2]) = e(r^2 + a^2)/m.A$$

Nous avons déterminé 3 composantes de la quadri-vitesse. En utilisant la relation de normalisation de la quadri-vitesse on obtient la dernière composante de la quadrivitesse U^r .

³⁵ Avant de traverser la singularité, elle doit traverser les horizons, dans le cas d'un trou noir sous critique $m^2 > a^2 + e^2$, ce qui n'est pas sans poser problème, en tout cas pour l'horizon de Cauchy interne du fait du décalage spectral infini vers le bleu, sur cet horizon, le moindre rayonnement présent est meurtrier. En fait la particule de l'histoire ne sert qu'à matérialiser la géodésique ou la ligne d'univers, qui elle, comme Carter l'a montré peut sous certaines conditions traverser la surface de l'anneau délimitée par la singularité en anneau.

$$-(1-2GMr/r^2+a^2).(U^t)^2 + ((r^2+a^2)/\Delta) (U^r)^2 = -1$$

$$-(1-2GMr/r^2+a^2).(e/m(1-2GMr/r^2+a^2)^2 + ((r^2+a^2)/\Delta) (U^r)^2 = -1$$

$$-(\Delta/r^2+a^2).(e/m(\Delta/r^2+a^2)^2 + ((r^2+a^2)/\Delta) (U^r)^2 = -1$$

$$-e^2 (r^2+a^2)/m\Delta + ((r^2+a^2)/\Delta) (U^r)^2 = -1$$

$$-e^2/m^2 + (U^r)^2 = -\Delta/(r^2+a^2) \text{ soit } -e^2/2m^2 + (U^r)^2/2 = -\Delta/2(r^2+a^2)$$

$$(U^r)^2/2 + \Delta/2(r^2+a^2) = e^2/2m^2$$

$$(U^r)^2/2 + V_{\text{eff}} = e^2/2m^2 \text{ soit } (U^r)^2/2 = (dr/d\tau)^2/2 = -(V_{\text{eff}} - e^2/2m^2) \quad (6-7-1-2)$$

avec
$$V_{\text{eff}} = \Delta/2(r^2+a^2),^{36} \rightarrow (U^r) = dr/d\tau = [- (\Delta/(r^2+a^2) - e^2/m^2)]^{1/2} \quad (6-7-1-3)$$

Ce qui implique que :
$$\Delta.m^2/(r^2+a^2) - e^2 \leq 0 \quad (6-7-1-4)$$

Ce système ne possède que des solutions implicites.

Pour notre propos, il n'est pas nécessaire de le résoudre. Soit:

$$E = \Delta.m^2/(r^2+a^2) - e^2 \quad (6-7-1-5)$$

Ce qui est important est que le mouvement n'est possible (du fait de la racine carrée) que quand E est négatif.

A l'infini nous trouvons:
$$E \rightarrow m^2 - e^2$$

donc nous devons avoir :
$$e^2 \geq m^2.$$

Compte tenu que e inclut l'énergie de la matière, ce n'est pas surprenant car m est l'énergie au repos de la matière. Nous devons vérifier que $E < 0$ partout sur l'axe de symétrie.

Calculons la dérivée première:

$$\partial E / \partial r = 2m^2 (Mr^2 - Ma^2 - rQ^2) / (r^2 + a^2)^2$$

d'où nous déduisons que le maximum global, qui annule cette dérivée, se produit à:

$$r_{\text{max}} = [Q^2 - (Q^4 + 4a^2M^2)^{1/2}] / 2M \quad (6-7-1-6)$$

alors que le minimum se produit à :

³⁶ Notons la forme de V_{eff} qui « répond » à « l'énergie cinétique relativiste » $(U^r)^2/2$.

$$r_{min} = [Q^2 + (Q^4 + 4a^2M^2)^{1/2}]/2M \quad (6-7-1-7)$$

On voit que le « centre de symétrie » est translaté vers les $r > 0$ de « Q^2 ».

Par ailleurs pour $r = 0$, le potentiel vaut $m^2 - e^2 + Q^2.m^2/a^2$, qui est le potentiel à l'infini, $m^2 - e^2$ translaté vers les énergies positives de $Q^2.m^2/a^2$.

Pour calculer la valeur des extrema, il faut reporter respectivement les valeurs de r_{min} et r_{max} dans

$$E = \Delta.m^2/(r^2+a^2) - e^2.$$

7-2-Graphe du potentiel sur l'axe, V_{eff} , en fonction de r , équation du mouvement.

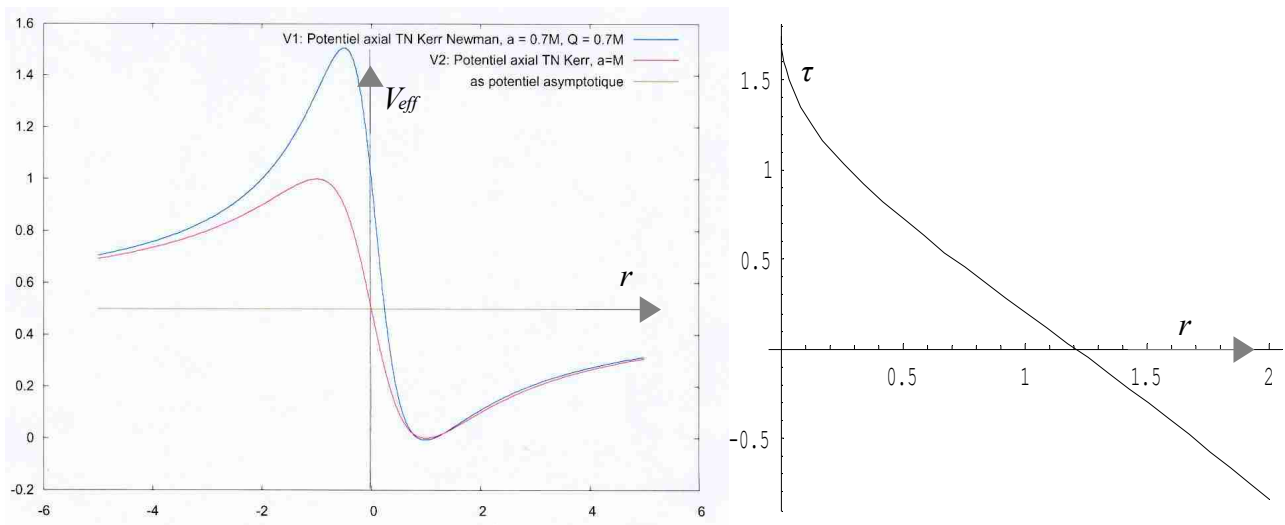


Fig 1: A gauche, On a porté r en abscisse, et V_{eff} le potentiel effectif en ordonnée. [54], à droite l'équation $\tau(r)$ pour $a=M$, $e/m=1$.

On remarque la symétrie en position et en valeur des extremum par rapport à $r = 0$ et la valeur asymptotique pour le trou noir de Kerr (V2) et la dissymétrie en position et en valeur introduite par la présence d'une charge, pour le trou noir de Kerr Newman (V1).

Le Trou noir de Kerr est critique $M^2 = a^2$ et celui de Kerr Newman quasiment critique $M^2 \approx a^2 + Q^2$. En posant : $\rho = (e^2 - m^2)/m^2$, on voit que pour que $E < 0$ il faut que : $\rho > 2M^2(Q^4 + 4a^2M^2)^{-1/2}$.

Notons que $dr/d\tau$ (quadri-vitesse) s'annule pour $r = 0$ et $r = \infty$ dans l'équation $\tau(r)$, intégrale de $d\tau = [(r^2 + a^2)/2GMr]^{1/2} dr$, représentée sur la courbe de droite qui vaut:

$$\tau(r) = \frac{2}{3} r \sqrt{\frac{1+r^2}{r}} + \frac{4(-1)^{1/4} \sqrt{1-\frac{i}{r}} \sqrt{1+\frac{i}{r}} r^{3/2} \sqrt{\frac{1+r^2}{r}} \text{EllipticF}\left[i \text{ArcSinh}\left[\frac{(-1)^{1/4}}{\sqrt{r}}\right], -1\right]}{3(1+r^2)} \sqrt{2}$$

7-Extremum du potentiel axial: cas du trou Noir de Kerr (Q=0)

1- Calcul dans ce cas

Pour finir ce complément, sur un cas général concret, examinons le cas très simple où la charge est nulle. Rappelons la valeur de E trouvée précédemment dans le cas général:

$$E = \Delta \cdot m^2 / (r^2 + a^2) - e^2$$

$$\text{Rappel: } \Delta = r^2 + a^2 + Q^2 - 2GMr \quad (7-1-1)$$

Dans le cas particulier où $Q = 0$ ceci se ramène à:

$$E = m^2 [1 - 2GMr / (r^2 + a^2)] - e^2$$

$$\partial E / \partial r = 2m^2 M(r^2 - a^2) / (r^2 + a^2)^2$$

Qui s'annule pour : $r = \pm a$

La position des extrema est évidente sur l'expression:

$$E = m^2 [1 - 2GMr / (r^2 + a^2)] - e^2 \quad (7-1-2)$$

Le maximum $r_{\max} = -a$

et le minimum $r_{\min} = +a$.

Posons :

$$\rho = (e^2 - m^2) / m^2 \quad (7-1-3)$$

On soustrait l'énergie au repos et on normalise.

Pour être certain que $E \leq 0$ est satisfait partout, même au maximum, ρ doit satisfaire une contrainte de limite minimum :

$$\rho > M/a \quad (7-1-4)$$

Physiquement cela signifie que le maximum du potentiel sur l'axe de symétrie est très supérieur au potentiel à l'infini positif. Autrement dit il faut déjà avoir une énergie cinétique importante (de l'ordre de l'énergie de masse) à l'infini pour franchir cette barrière de potentiel.

En normalisant a par rapport à M :

$$\dot{a} = a/M \quad (7-1-5)$$

2- Energie minimale pour franchir la barrière de potentiel

Nous en déduisons l'énergie minimale pour franchir la barrière de potentiel dans le cas non chargé.

$$e_{\min} = m [(1 + \dot{a}) / \dot{a}]^{1/2} \quad (7-2-1)$$

En dérivant:

$$\partial e_{\min} / \partial \dot{a} = -(m/2M\dot{a}^2) [\dot{a} / (1 + \dot{a})]^{1/2}$$

On voit que c'est négatif quand « $\dot{a}$ » est dans l'intervalle $[0,1]$

Ce résultat nous encourage à rechercher un trou noir de moment angulaire élevé.

L'énergie cinétique minimum nécessaire pour franchir la barrière de potentiel est:

$$e_{\text{cin}} = m \{ [(1 + \dot{a}) / \dot{a}]^{1/2} - 1 \} \quad (7-2-2)$$

Pour un trou noir extrémal, cela vaut :

$$e_{\text{cin}} = m [(2)^{1/2} - 1] \quad (7-2-3)$$

Ce qui est inférieur à l'énergie « au repos : $e = mc^2$ » du « vaisseau spatial », mais qui représente une énergie énorme (par exemple pour un TN de 10^7 masses solaires, cela correspond à 10^{22} joules pour un vaisseau spatial type ISS).

Des résultats obtenus précédemment :

$$(U^r) = dr/d\tau = [-\Delta/(r^2+a^2) - e^2/m^2]^{1/2},$$

et avec :

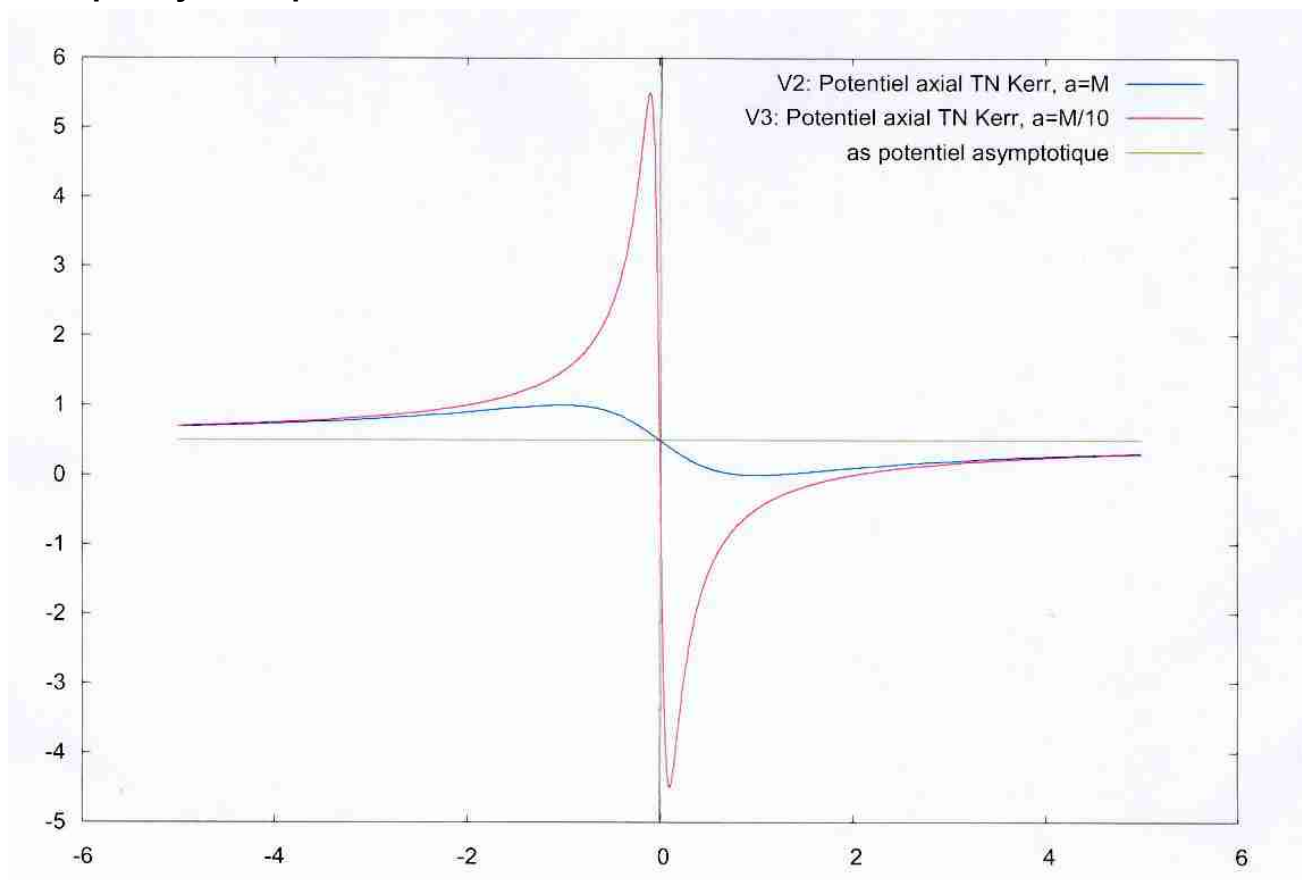
$$E = \Delta.m^2/(r^2+a^2) - e^2$$

L'expression du temps propre s'écrit

$$d\tau = -m.dr/(-E)^{1/2}$$

(Le signe correspond à la direction du mouvement vers le trou noir)

3-Graphe synthétique



Potentiel $V2$ fonction de r pour un TN de Kerr pour deux valeurs du rapport a/M .

On remarque la symétrie parfaite, en position des maxima par rapport à l'origine et en valeur par rapport à la valeur asymptotique, et la sensibilité au paramètre a de la valeur du pic de potentiel.

Plus a est petit, plus le pic de potentiel est grand, en particulier il est infini pour un Trou noir de Schwarzschild où $a = 0$. [54]

8- Quatrième invariant dans la métrique de Kerr

En plus des 3 invariants classiques liés à la conservation de la masse, de l'énergie et du moment angulaire B. Carter a mis en évidence en réussissant à séparer les variables radiales et angulaires dans l'équation de Hamilton Jacobi, un quatrième invariant (qui s'est révélé être lié à l'existence d'un « tenseur de Killing »), dont la relation (pas immédiate) avec la grandeur conservée par ce tenseur a permis d'en révéler la nature physique.

1-Séparabilité de l'équation de Hamilton Jacobi

La séparabilité de l'équation de Hamilton Jacobi³⁷, dont dérivent les équations du mouvement

$$g^{ij} \frac{\partial s}{\partial x^i} \frac{\partial s}{\partial x^j} + m^2 c^2 = 0 \quad (8-1-1)$$

d'une particule de masse m dans l'espace temps de métrique g_{ij} , est un sujet qui a fait couler beaucoup d'encre. Rappelons que g^{ij} est la métrique inverse et s l'intégrale d'action d'un Lagrangien de la forme:

$$L = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j \text{ avec } p^i = m \dot{x}^i / d\lambda.$$

Carter s'étonne, dans son article de 1968, de cette séparabilité qu'il analysera plus tard[59]

L'équation de Hamilton Jacobi est une équation non linéaire, aux dérivées partielles à 4 variables et il n'existe pas de méthode générale d'intégration sauf à être résolue par séparation des variables. Ce qui revient à chercher une intégrale de la forme :

$$s(\lambda, t, r, \theta, \varphi) = s_\lambda + s_t + s_r + s_\theta + s_\varphi \quad (8-1-2)$$

Il est évident que la séparation des variables n'est possible que s'il existe autant d'invariants que d'équations séparées (quatre dans notre problème).

Trois sont évidents, puisqu'il y a un invariant métrique, un vecteur de Killing de type temps (la solution est stationnaire), et un de type rotation autour d'un axe (symétrie axiale) permettant de mettre (8-1-2) sous la forme :

$$s = -\frac{1}{2} m^2 \lambda - E \cdot t + L \cdot \varphi + s_\theta + s_r.$$

En appliquant (8-1-1), en utilisant l'expression du Hamiltonien (cf note bas de page) et les relations $\partial s / \partial \theta = p_\theta$, $\partial s / \partial r = p_r$, l'équation se sépare en θ et r . Nous savons maintenant que cela est dû à l'existence d'un tenseur de Killing (indépendant des autres éléments) qui sous tend une invariance (du deuxième ordre) qui traduit la symétrie (cachée).

2- Le tenseur de Killing de la métrique de Kerr

La métrique possède ce que nous appellerons un tenseur de Killing C'est un tenseur $\xi_{\mu_1 \dots \mu_n} (0, n)$ symétrique qui satisfait à :

$$\nabla_{(\sigma} \xi_{\mu_1 \dots \mu_n)} = 0. \quad (8-2-1)$$

La métrique elle-même est un tenseur de Killing ainsi que les produits symétrisés de vecteurs de Killing.

³⁷ Hamiltonien pour une particule massive, ($p_i = \partial L(q, q') / \partial q'^i$) en métrique de Kerr: $H = p_i q'^i - L = \frac{1}{2} g_{ij} p^i p^j = \frac{1}{2} g^{ij} p_i p_j = -\frac{1}{2} m^2 c^2$

3- L'invariant associé au tenseur de Killing : généralités

Un vecteur de Killing implique un invariant sur le mouvement sur une géodésique, s'il existe un tenseur de Killing, sur une géodésique nous allons avoir :

$$\xi_{\mu_1 \dots \mu_n} \frac{dx^{\mu_1}}{d\lambda} \dots \frac{dx^{\mu_n}}{d\lambda} = \text{constant} . \quad (8-3-1)$$

A la différence des vecteurs de Killing, les tenseurs de Killing de rang plus élevé, ne correspondent pas à des isométries. En géométrie de Kerr, définissons le tenseur $(0, 2)$: ³⁸

$$\xi_{\mu\nu} = 2\rho^2 l_{(\mu} n_{\nu)} + r^2 g_{\mu\nu} \quad (8-3-2)$$

Dans cette expression les deux vecteurs l et n sont donnés par (on a élevé les indices).

(8-3-3)

$$\begin{aligned} l^\mu &= \frac{1}{\Delta} (r^2 + a^2, \Delta, 0, a) \\ n^\mu &= \frac{1}{2\rho^2} (r^2 + a^2, -\Delta, 0, a) . \end{aligned}$$

Les deux vecteurs sont nuls et satisfont :

$$l^\mu l_\mu = 0 , \quad n^\mu n_\mu = 0 , \quad l^\mu n_\mu = -1 . \quad (8-3-4)$$

(Signalons, qu'ils sont les vecteurs nuls spéciaux de la classification de Petrov pour cette espace temps). Avec ces définitions, nous pouvons vérifier que $\xi_{\mu\nu}$ est un tenseur de Killing.

Soulignons que ce n'est pas par hasard qu'on a construit ce tenseur de Killing à partir des deux vecteurs nuls principaux de la métrique de Kerr (un pour les géodésiques nulles entrantes et l'autre pour les sortantes). En effet ces vecteurs nuls sont les « traceurs » de la symétrie propre aux espaces temps de type D, indépendante des autres symétries éventuelles de la solution.

Vérifions que par exemple, $l^\mu n_\mu$ sont nuls,

$$\text{Calculons } l_\mu = g_{\mu\nu} l^\nu , l_0 = g_{00} l^0 + g_{30} l^3 , l_1 = g_{11} l^1 , l_2 = g_{22} l^2 , l_3 = g_{30} l^0 + g_{33} l^3$$

En faisant les calculs et en simplifiant on obtient :

$$l_\mu = (-1, \rho^2/\Delta, 0, a \sin^2\theta)$$

En effectuant:

$$l_\mu l^\mu = 1/\Delta (-(r^2+a^2) + \rho^2 \Delta/\Delta + a^2 \sin^2\theta)$$

on vérifie que c'est bien nul.

$$\text{De même calculons } n_\mu = g_{\mu\nu} n^\nu , n_0 = g_{00} n^0 + g_{30} n^3 , n_1 = g_{11} n^1 , n_2 = g_{22} n^2 , n_3 = g_{30} n^0 + g_{33} n^3$$

On obtient :

$$n_\mu = (-\Delta/2\rho^2, -1/2, 0, \Delta a \sin^2\theta/2\rho^2)$$

En effectuant :

$$n_\mu n^\mu = 1/2\rho (-\Delta(r^2+a^2)/2\rho^2 + \Delta/2 + a^2 \sin^2\theta \Delta/2\rho^2) ,$$

on vérifie également que c'est bien nul.

4- Calcul du tenseur de Killing de Kerr

Pour simplifier les calculs nous allons utiliser un tenseur de Killing auxiliaire $K'_{\mu\nu}$,³⁹ qui se prête mieux à la factorisation en Δ, ρ^2, P, R , ce qui évite des développements très laborieux.

³⁸ Nous utilisons ici les coordonnées de Boyer Lindquist en signature $(-, +, +, +)$, on pose $c=1$.

³⁹ Comme $g_{\mu\nu}$ est un tenseur de Killing, $K'_{\mu\nu} = K_{\mu\nu} + a^2 g_{\mu\nu}$ est aussi un tenseur de Killing.

$$K'_{\mu\nu} = 2\rho^2 l_{(\mu} n_{\nu)} + (r^2 + a^2) g_{\mu\nu}$$

En utilisant les valeurs données ci-dessus, calculons le :

$$K'_{\mu\nu} = 2\rho^2 l_{(\mu} n_{\nu)} + (r^2 + a^2) g_{\mu\nu} : \text{soit } K'_{\mu\nu} = \rho^2 (l_{\mu} n_{\nu} + l_{\nu} n_{\mu}) + (r^2 + a^2) g_{\mu\nu}$$

De ce qui précède

$$l_0 = -1, l_1 = \rho^2/\Delta, l_2 = 0, l_3 = a \sin^2 \theta$$

$$n_0 = -\Delta/2\rho^2, n_1 = -1/2, n_2 = 0, n_3 = \Delta a \sin^2 \theta / 2\rho^2$$

En développant, les composantes $L_{\mu\nu}$ du tenseur $\rho^2 l_{(\mu} n_{\nu)}$ sont :

$L_{00} = 2\rho^2 \cdot l_0 \cdot n_0$	$L_{10} = \rho^2 (l_1 \cdot n_0 + l_0 \cdot n_1)$	0	$L_{30} = \rho^2 (l_3 \cdot n_0 + l_0 \cdot n_3)$
$L_{01} = L_{10}$	$L_{11} = 2\rho^2 \cdot l_1 \cdot n_1$	0	$L_{31} = \rho^2 (l_3 \cdot n_1 + l_1 \cdot n_3)$
0	0	0	0
$L_{03} = L_{30}$	$L_{13} = \rho^2 (l_1 \cdot n_3 + l_3 \cdot n_1)$	0	$L_{33} = 2\rho^2 \cdot l_3 \cdot n_3$

Soit avec la métrique de Kerr en coordonnées de Boyer Lindquist :

$$ds^2 = -[(\Delta - a^2 \sin^2 \theta) / \rho^2] \cdot dt^2 - [2a \sin^2 \theta (r^2 + a^2 - \Delta) / \rho^2] \cdot dt \cdot d\phi + (\sin^2 \theta / \rho^2) [(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta] d\phi^2 + (\rho^2 / \Delta) \cdot dr^2 + \rho^2 \cdot d\theta^2$$

On obtient le tenseur: $K'_{\mu\nu}$ (8-4-1)

$\Delta - (r^2 + a^2)(1 - 2GMr/\rho^2)$	0	0	$-\frac{\sin^2 \theta}{(r^2 + a^2)/\rho^2} (\Delta a + 2a(r^2 + a^2 - \Delta))$
0	$\rho^2 (-\frac{\rho^2 + r^2 + a^2}{\Delta})$	0	0
0	0	$\rho^2 (r^2 + a^2)$	0
$-\frac{\sin^2 \theta (\Delta a + 2a(r^2 + a^2 - \Delta))}{(r^2 + a^2)/\rho^2}$	0	0	$\frac{\sin^2 \theta [a^2 \sin^2 \theta \Delta + ((r^2 + a^2)/\rho^2)((r^2 + a^2)^2 - a^2 \sin^2 \theta \Delta)]}{(r^2 + a^2)/\rho^2}$

On voit que ce tenseur est symétrique, comme le tenseur métrique.

5 – Calcul de l'invariant associé au tenseur de Killing de Kerr

L'invariant est : $K'_{\mu\nu} p^\mu p^\nu$

Mais comme la masse de la particule m est un invariant en Relativité, on peut aussi calculer l'invariant $K'_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$, et multiplier ensuite par m^2 car: $m \cdot x^\mu = p^\mu$ pour une particule massive. On obtient :

$$K'_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = (\Delta - (r^2 + a^2)(1 - 2GMr/\rho^2)) \cdot t'^2 + [a^2 \sin^4 \theta \Delta + ((r^2 + a^2) \sin^2 \theta / \rho^2)((r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta)] \cdot \phi'^2 + [(-\rho^4 + \rho^2(r^2 + a^2) / \Delta) \cdot r'^2 + \rho^2 \cdot (r^2 + a^2) \cdot \theta'^2 - 2(-\sin^2 \theta (\Delta a + 2a(r^2 + a^2 - \Delta)(r^2 + a^2) / \rho^2)) \cdot \phi' \cdot t'] \quad (8-4-2)$$

$$K'_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = \{[(\rho^2 \Delta - (r^2 + a^2)(\Delta - a^2 \sin^2 \theta)) / \rho^2] \cdot t'^2 + \{ \sin^2 \theta [\rho^2 a^2 \sin^2 \theta \Delta + (r^2 + a^2)[(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta]] / \rho^2 \} \cdot \phi'^2 + [(\rho^2 / \Delta)(a^2 \sin^2 \theta)] \cdot r'^2 + \rho^2 \cdot (r^2 + a^2) \cdot \theta'^2 - \{ 2a \sin^2 \theta / \rho^2 \cdot (a^2 \sin^2 \theta \Delta - (r^2 + a^2)^2) \} \phi' t' \}$$

Il peut se mettre⁴⁰ sous la forme donnée par F. De Felice [19] sous éq. (16)

$$K_{\phi x^i x^j} = \Sigma \left(\frac{a^2 \sin^2 \theta}{\Delta} \dot{\phi}^2 + (r^2 + a^2) \dot{\theta}^2 \right) + \Sigma^{-1} \{ (r^2 + a^2) \sin^2 \theta [(r^2 + a^2) \dot{\phi} - a \dot{t}]^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta (a \sin^2 \theta \dot{\phi} - \dot{t})^2 \} = K + a^2 m^2 c^2$$

En utilisant les relations

⁴⁰ J'ai fait les calculs et vérifié. F.De Felice utilise la notation Σ pour ρ^2 (c'est une convention souvent utilisée).

$$\begin{aligned}\rho^2 d\theta/d\lambda &= \sqrt{\Theta}, \\ \rho^2 dr/d\lambda &= \sqrt{R}, \\ \rho^2 d\phi/d\lambda &= -(aE - L_z/\sin^2\theta) + (a/\Delta)P, \\ \rho^2 dt/d\lambda &= -a(aE \sin^2\theta - L_z) + (r^2 + a^2)\Delta^{-1}P.\end{aligned}$$

$$\Theta = K_c - \cos^2\theta[a^2(m^2-E^2)+L_z^2/\sin^2\theta]$$

$$P = E(r^2+a^2) - L_z a - eQr$$

$$R = P^2 - \Delta[m^2 r^2 + K_c + (L_z - aE)^2]$$

Avec la constante de Carter que nous noterons:

$$K_c = p_\theta^2 + \cos^2\theta[a^2(m^2-E^2)+L_z^2/\sin^2\theta]$$

Une autre constante de séparation K , souvent utilisée, liée à la constante de Carter vaut:

$$K = K_c + (L_z - aE)^2$$

En réintroduisant les impulsions $p^\mu = m \cdot x^\mu$, en développant et en simplifiant on obtient⁴¹

$$K'_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = (a^2 \sin^2\theta / \Delta \rho^2) [R - P^2] + [(r^2 + a^2) / \rho^2] [K_c + a^2 E^2 - 2aE L_z - \cos^2\theta \cdot a^2 m^2 + L_z^2]$$

$$\begin{aligned}K'_{\mu\nu} p^\mu p^\nu &= (-a^2 \sin^2\theta / \Delta \rho^2) [\Delta(m^2 r^2 + (L_z - aE)^2 + K_c)] + [(r^2 + a^2) / \rho^2] [K_c + a^2 E^2 - 2aE L_z - \cos^2\theta \cdot a^2 m^2 + L_z^2] \\ &= 1/\rho^2 \{ [K_c(r^2 + a^2) - a^2 \sin^2\theta] - a^2 \sin^2\theta [(L_z - aE)^2 + m^2 r^2] + (r^2 + a^2)(L_z - aE)^2 - a^2 \sin^2\theta m^2 r^2 - (r^2 + a^2) a^2 m^2 \cos^2\theta \} \\ &= 1/\rho^2 \{ [K_c(r^2 + a^2 \cos^2\theta) + (r^2 + a^2 \cos^2\theta) (L_z - aE)^2 - m^2 a^2 (r^2 + a^2 \cos^2\theta)] \}\end{aligned}$$

$$K'_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = K_c + (L_z - aE)^2 - m^2 a^2 \quad (8-4-3)$$

Le résultat paraît différent de celui cité dans F. De Felice, mais il utilise une autre constante de séparation K définie par l'équation (16) de [19].

$$P_\theta^2 + \frac{l^2}{\sin^2 \theta} = K + m^2 c^2 a^2 \sin^2 \theta + 2a \frac{e}{c} l - \frac{e^2 a^2}{c^2} \sin^2 \theta. \quad (8-4-4)$$

Calculons (avec $c=1$), la différence:

$$K - K_c = -m^2 a^2 + (Ea - L_z)^2 \quad (8-4-5)$$

En reportant on obtient :

$$K'_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = K \quad (8-4-6)$$

Ce n'est pas encore le bon résultat. La différence avec le résultat donné par De Felice est lié au fait qu'on a pris un facteur a^2 supplémentaire pour le tenseur de Killing auxiliaire K' .

Le tenseur de Killing à considérer est :

$$\xi_{\mu\nu} = 2\rho^2 l_{(\mu} n_{\nu)} + r^2 g_{\mu\nu} \quad (8-4-7)$$

Nous avons fait les calculs avec:

$$K'_{\mu\nu} = 2\rho^2 l_{(\mu} n_{\nu)} + (r^2 + a^2) g_{\mu\nu}$$

On voit que:

$$K'_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = \xi_{\mu\nu} p^\mu p^\nu - a^2 g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu \quad (8-4-8)$$

Ce tenseur égal à un tenseur symétrique auquel on soustrait un autre tenseur symétrique de même valence, est également symétrique. Le bon résultat s'écrit donc :

⁴¹ F. De Felice [19], indique que c'est la valeur donnée par Walker et Penrose (1970) dans Commun. Math. phys 18 265. Mais dans cet article le tenseur de Killing est calculé dans les coordonnées de Kerr et sous la forme contravariante, ce qui ne facilite pas les comparaisons.

$$\xi_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = K + m^2 a^2 = Kc + (Ea - Lz)^2 = \mathcal{K} \quad (8-4-9)$$

Car : $a^2 g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = a^2 m^2 g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$ vaut $-m^2 a^2$ car $g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = -1$ (quadrivitesse)

Ce qui est (enfin) cohérent avec le résultat donné en [19] que l'on rappelle ci dessous

$$\begin{aligned} K_{\mu\nu} x^\mu x^\nu &= \Sigma \left(\frac{a^2 \sin^2 \theta}{\Delta} \dot{r}^2 + (r^2 + a^2) \dot{\theta}^2 \right) \\ &\quad + \Sigma^{-1} \{ (r^2 + a^2) \sin^2 \theta [(r^2 + a^2) \dot{\phi} - a \dot{t}]^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta (a \sin^2 \theta \dot{\phi} - \dot{t})^2 \} \\ &= K + a^2 m^2 c^2 \end{aligned}$$

Dans la relation (8-4-9) nous avons rappelé les différentes constantes mentionnées.

Une remarque importante : Alors que K peut être négatif, $K + a^2 m^2$ est toujours positif, comme cela est facile à vérifier sur l'équation (16) de [19].

Tout cela est bien laborieux, mais c'est lié au fait qu'on rencontre différentes constantes de séparation dans la littérature. La constante de Carter a été établie initialement dans les coordonnées originales de Kerr et ici nous sommes en coordonnées de Boyer Lindquist.

Il faut donc bien définir quelle constante de séparation on prend et les coordonnées associées. Ici nous avons pris la convention adoptée par F. De Felice.

Pour autant on voit que l'invariant n'est ni égal à la constante K qu'il a défini, ni égal à la constante de Carter (il y a des termes « constants » supplémentaires).

Cela montre la complexité « physique » de l'invariant sous tendu par ce tenseur de Killing, indépendant des trois autres, complexité physique que nous allons analyser.

6- Point sur les invariants, nature physique de ce dernier invariant.

A ce stade, faisons un point, nous avons :

- L'invariant « métrique » lié à la normalisation de la quadri vitesse.
- Un invariant par rapport au temps (vecteur de Killing ∂_t) faisant intervenir linéairement la composant p^t de la quadri-impulsion.
- Un par rapport aux rotations autour d'un axe (vecteur de Killing ∂_ϕ) faisant intervenir linéairement la composante p^ϕ de la quadri-impulsion
- Nous avons identifié, en plus, un tenseur de Killing indépendant des autres invariants, faisant intervenir quadratiquement toutes les composantes p^μ des quadri impulsions (à la différence des autres invariants relatifs chacun à une composante particulière de p^μ).
- Dans [53] il est démontré est que l'existence d'un tenseur de Killing conforme est une propriété générique, indépendante de la métrique, des espaces temps de type D , dans la classification de Petrov.

De plus il est démontré que dans cette métrique, en particulier, ce tenseur se révèle être un tenseur de Killing (c'est-à-dire que la conservation s'applique non seulement aux géodésiques nulles mais aux géodésiques de type temps).

Intéressons nous aux conséquences physiques de cette invariance, quelles contraintes cela apporte.

7- Quelques remarques phénoménologiques préliminaires

Invariant de Carter et tenseur de Killing

On a vu qu'ils sont liés. La constante de Carter régit indépendamment des autres coordonnées, le mouvement (géodésique) selon la coordonnée θ , fonction seulement de θ et de certaines conditions initiales de la particule de test et de certains paramètres du champ. Il est remarquable que le mouvement

géodésique lié à θ ne dépend ni de la masse du trou noir, ni de sa charge et ni de la charge de la particule de test. Cela montre que c'est bien la rotation qui est le phénomène structurant pour cette coordonnée.

La constante de Carter régit également indépendamment le mouvement (géodésique) selon la coordonnée r en fonction seulement de la coordonnée r et des paramètres du champ et des conditions initiales.

8- Interprétation physique à la limite Newtonienne de cet invariant

Ce qui suit s'appuie largement sur la référence [19] : « Angular Momentum and separation constant in the Kerr metric F. de Felice J.Phys.A :Math. Gen ». Nous ne donnons ici que les conclusions.

Comme le résultat final qu'on obtient, indiqué ci-dessous, le précise, on voit que non seulement, K n'est pas le carré du moment angulaire par rapport à O , mais que cette valeur doit être corrigée par des termes proportionnels au paramètre de rotation a (couplage l, ε),

$$K = M_{\infty(Q')}^2 - 2alc \left\{ \left(\frac{\varepsilon}{mc^2} \right) - \left[\left(\frac{\varepsilon}{mc^2} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} \right\} \quad (8-8-1)$$

Où l est le moment angulaire, ε l'énergie, m la masse de la particule. Avec $K = K_c - m^2 a^2 + (\varepsilon a - l)^2$ on voit encore un couplage l, ε, a . Quant au terme $M_{\infty(Q')}$, c'est le moment cinétique de la particule par rapport à Q' qui est le point qui correspond à l'origine des coordonnées (qui n'est pas sur l'axe en général), dans un système de coordonnées ellipsoïdales⁴². Si on considère que l, ε sont les quantités mesurables physiquement (observables), on voit que l'invariant (qui caractérise l'espace temps) les fait intervenir de façon combinée et complexe.

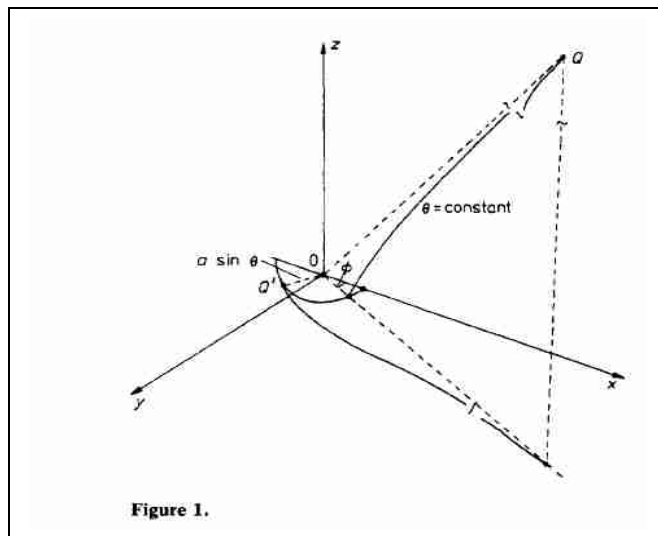


Figure 1.

9- Couplage énergie / moment angulaire

La raison est simplement que l'espace temps à l'infini, est toujours exprimé (dans les coordonnées de Boyer Lindquist) en termes de coordonnées ellipsoïdales de paramètre a , donc les termes additionnels sont des contributions « fictives » au moment angulaire du fait du caractère non inertiel du système de coordonnées.

⁴² On dit souvent obloïde qui est plus correct car si les surfaces à $r = cte$ sont des ellipsoïdes, à $\theta = cte$ ce sont des hyperboloïdes.

Nous avons déjà remarqué le couplage entre le moment angulaire et l'énergie de la particule sur la forme de l'équation géodésique équatoriale. C'est une caractéristique fondamentale de ce type d'espace temps stationnaire. En métrique de Schwarzschild, les orbites circulaires ne dépendaient que du moment angulaire de la particule. En coordonnées de Boyer Lindquist elles dépendent aussi de l'énergie du fait du couplage lié à la «rotation» de l'espace temps lui-même. Nous y reviendrons à propos de la pertinence physique de ces coordonnées.

Cela donne tout son sens à la remarque citée à la fin de l'article de F.De Felice: « On peut aussi interpréter ces termes supplémentaires comme la contribution asymptotique du champ gravitationnel lui-même au moment cinétique de la particule ».

9- Etude du genre des vecteurs de Killing, des hypersurfaces et des régions délimitées par ces hypersurfaces en métrique de Kerr

Quelques Rappels :

Nous utilisons ici la Métrique de Kerr en signature (+, -, -, -) qui peut s'écrire:

$$\left[\frac{(\Delta - a^2 \sin^2 \theta)}{\rho^2} \right] dt^2 + \left[\frac{2a \sin^2 \theta (r^2 + a^2 - \Delta)}{\rho^2} \right] dt d\varphi - \frac{\sin^2 \theta [(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta]}{\rho^2} d\varphi^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 \quad (9-0-1)$$

avec : $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$, $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$

La métrique inverse vaut:

$$g^{11} (\partial/\partial t)^2 + g^{13} (\partial/\partial t)(\partial/\partial \varphi) + g^{31} (\partial/\partial \varphi)(\partial/\partial t) - (\Delta/\rho^2) (\partial/\partial r)^2 - (1/\rho^2) (\partial/\partial \theta)^2 + g^{33} (\partial/\partial \varphi)^2 \quad (9-0-2)$$

On n'a explicité que les coefficients qui seront utilisés dans le calcul qui suit.

Nous allons étudier quelques hypersurfaces remarquables, par la méthode générale⁴³ qui consiste à déterminer le champ de vecteurs normal à cette hypersurface, son genre, en déduire le genre de l'hypersurface et des régions délimitées par ces hypersurfaces.

Rappelons qu'un vecteur ξ^μ , normal à une hypersurface définie par une fonction f des coordonnées du type : $f(t, r, \theta, \varphi) = \text{constante}$ est tel que : $\xi^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu f$.

Remarquons qu'appliqué à une fonction, la dérivée partielle « ordinaire » est équivalente à la dérivée « covariante ». Cette relation très simple se déduit simplement du fait que si une fonction des coordonnées est constante dans une hypersurface, elle l'est sur toute courbe appartenant à cette hypersurface et que en conséquence $df/d\lambda = 0$ sur la courbe, ce qui peut s'écrire :

$$df/d\lambda = (\partial f / \partial x^\mu) (dx^\mu / d\lambda) = 0 \quad (9-0-3)$$

On reconnaît le vecteur tangent à la courbe $dx^\mu / d\lambda$, qui appartient à l'espace tangent à l'hypersurface et $\xi_\mu = \partial f / \partial x^\mu$ le «4-gradient» de la fonction. La relation (9-0-3) indique que le produit scalaire du vecteur contravariant $dx^\mu / d\lambda$ par $\xi_\mu = g_{\mu\nu} \xi^\nu = g_{\mu\nu} \partial_\nu f$ est nul, donc que ξ^μ est orthogonal à tous les vecteurs de l'hypersurface (en particulier avec les vecteurs de base de la métrique induite).

Ceci permet de déterminer que l'hypersurface est d'un genre opposé⁴⁴ à celui du vecteur normal. Ceci étant précisé, commençons les calculs.

⁴³ Il existe d'autres méthodes, qui peuvent être plus simples, par exemple pour une hypersurface déterminée en fixant une coordonnée, la métrique induite se déduisant immédiatement, mais la méthode présentée a l'avantage d'être très générale pour une fonction quelconque sous réserve des restrictions données ci après.

⁴⁴ Le produit scalaire de ξ^μ avec les vecteurs de base des coordonnées de la métrique induite, contenus dans l'hypersurface étant nul, si on suppose une seule coordonnée de type temps. Sauf s'il est de genre nul, où dans des cas (machine temporelle par exemple) où il y a plusieurs coordonnées de type temps.

1- Type de l'hypersurface qui délimite la zone critique de violation de causalité.

Pour qu'une boucle temporelle existe il faut que $g_{\varphi\varphi} > 0$, la limite étant pour la valeur nulle :

$$g_{\varphi\varphi} = (\sin^2\theta/\rho^2)[(r^2+a^2)(r^2+a^2\cos^2\theta) + 2Ma^2r\sin^2\theta] = 0 \quad (9-1-1)$$

En développant on arrive à une équation de degré 4 en z (on pose $z = -r$, car il est évident qu'on doit avoir $r \leq 0$ pour avoir des racines réelles)

$$z^4 + z^2a^2(2-\sin^2\theta) - z(2a^2M\sin^2\theta) + a^4(1-\sin^2\theta) = 0 \quad (9-1-2)$$

1-1 Calcul des racines de l'équation.

On sait que ce type d'équation a une solution analytique (pénible à calculer à la main). Les solutions en z sont fonction des paramètres a , M , et de la variable θ : $z = f(\theta)$.

1-2 Cas : $\theta = \pi/2$, l'expression se simplifie et se ramène à :

$$z(z^3 + a^2z - 2Ma^2) = 0 \quad (9-1-2-1)$$

qui semble avoir la racine évidente $z_0 = 0$, qui n'est pas une racine, car du fait du facteur $(\sin^2\theta/\rho^2)$ qui pour $\theta = \pi/2$ s'écrit $1/r^2$, $g_{\varphi\varphi}$ vaut ∞ pour $r = 0$. Cherchons d'autres racines réelles liées à l'équation du troisième degré :

$$z^3 + a^2z - 2Ma^2 = 0$$

du type « $z^3 + p.z + q = 0$ » dont le discriminant

$$q^2/4 + p^3/27 = M^2a^4 + a^6/27 > 0,$$

ce qui indique qu'il n'y a qu'une autre racine réelle, qu'on obtient par la méthode habituelle : Formule de Cardan par exemple:

$$z_1 = [Ma^2 + (M^2a^4 + a^6/27)^{1/2}]^{1/3} + [Ma^2 - (M^2a^4 + a^6/27)^{1/2}]^{1/3} \quad (9-1-2-2)$$

Ceci nous montre que $g_{\varphi\varphi} > 0$ pour : $0 < z < z_1$.

1-3 Cas : $\theta \neq \pi/2$, l'équation reste du quatrième degré elle peut s'écrire :

$$z^4 + z^2(a^2 + a^2\cos^2\theta) - z.2M(a^2 - a^2\cos^2\theta) + a^4\cos^2\theta = 0 \quad (9-1-3-1)$$

C'est la forme classique de résolution analytique d'une équation du quatrième degré.

La solution donnée par Mathématique est sous une forme peu exploitable, on retiendra qu'il n'y a que deux racines réelles de r pour un θ donné. On peut remarquer la forme particulière de cette équation. Posons $p = a^2$ et $q = a^2\cos^2\theta$, l'équation s'écrit alors : $z^4 + z^2.(p+q) - z.2M(p-q) + pq = 0$.

1-4 La valeur r maximum de la zone critique est atteinte pour $\theta = \pi/2$.

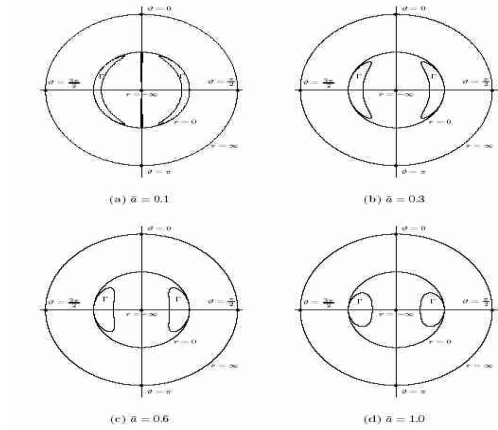


Figure 1: (a,b,c,d) :Représentation en coordonnées polaires « conformes » de la forme de la machine temporelle pour différentes valeurs du facteur de rotation a . On voit que lorsque a augmente cela a deux effets : la zone s'éloigne des pôles, mais elle s'étend vers des r plus négatifs. Figure d'après [37]

Nous nous limiterons ici à l'étude pour $\theta = \pi/2$, qui fournit la valeur maximum de z , comme on peut s'en rendre compte en calculant la dérivée partielle par rapport à θ de l'équation.

$$\begin{aligned} g_{\varphi\varphi}(\theta, r) &= (z^2 + a^2)(z^2 + a^2 \cos^2 \theta) - 2Ma^2 z \sin^2 \theta = 0 \\ \partial_{\theta} g_{\varphi\varphi} d\theta &= -2[(z^2 + a^2) a^2 \cos \theta \sin \theta + 4Ma^2 z \sin \theta \cos \theta] d\theta \end{aligned} \quad (9-1-4)$$

Qui est négative dans l'intervalle $\theta = [0, \pi/2]$.

Donc lorsque θ croît de 0 à $\pi/2$, cela fait décroître uniformément la fonction $g_{\varphi\varphi}(\theta, r)$, sur l'hypersurface $g_{\varphi\varphi}(\theta, r) = \text{constante}$ cela implique que doit r croître uniformément (pour compenser : $dg_{\varphi\varphi} = \partial_{\theta} g_{\varphi\varphi} d\theta + \partial_r g_{\varphi\varphi} dr$). A noter que la dérivée partielle $\partial_{\theta} g_{\varphi\varphi}$ s'annule pour $\theta = \pi/2$ et $\theta = 0$ (aux bornes). Cette hypersurface est de topologie «hypertorique», dans ces coordonnées, torique ($r = f(\theta, \varphi)$) si on ne prend pas en compte la coordonnée temps.

1-5 Détermination du genre de l'hypersurface Σ définie par $g_{\varphi\varphi} = 0$.

Pour l'hypersurface à $g_{\varphi\varphi} = 0$, avec $G=1$, $c=1$ en signature (+, -, -, -),

$$f = g_{\varphi\varphi} = (r^2 + a^2)(r^2 + a^2 \cos^2 \theta) + 2Ma^2 r \sin^2 \theta = 0 \quad (9-1-5-1)$$

La métrique devient :

$$ds^2 = dt^2(1 - 2Mr/\rho^2) + 2dt.d\varphi(2.M.a.r.\sin^2\theta/\rho^2) - dr^2.\rho^2/\Delta - d\theta^2\rho^2$$

La fonction $f = 0$ qui caractérise l'hypersurface Σ va être ré-écrite autrement :

$$r^4 + r^2 a^2 \cos^2 \theta + a^2 r^2 + a^4 \cos^2 \theta + 2Ma^2 r \sin^2 \theta = 0$$

Calculons $\xi^\mu(t, r, \theta, \varphi)$ normal à l'hypersurface Σ . De :

$$\xi_\mu = [0, \partial_{\varphi} f, \partial_{\theta} f, 0] \quad (9-1-5-2)$$

Avec

$$\begin{aligned} \partial_{\varphi} f &= 4r^3 + 2r.a^2(\cos^2\theta + 1) + 2Ma^2\sin^2\theta \\ \partial_{\theta} f &= 2\cos\theta.\sin\theta[2Ma^2r - r^2a^2 - a^4] \end{aligned} \quad (9-1-5-3)$$

$$\xi^\mu = g^{\mu\nu} \xi_\nu = [0, g^{rr}\partial_{\varphi} f, g^{\theta\theta}\partial_{\theta} f, 0] \quad (9-1-5-4)$$

Avec $g^{rr} = -\Delta/\rho^2$, $g^{\theta\theta} = -1/\rho^2$, d'après le tenseur métrique inverse de Kerr : Calculons

$$\xi^\mu \xi_\mu = -\Delta(\partial_{\varphi} f)^2/\rho^2 - (\partial_{\theta} f)^2/\rho^2 = -[\Delta(\partial_{\varphi} f)^2/\rho^2 + (\partial_{\theta} f)^2/\rho^2] \leq 0 \quad (9-1-5-6)$$

car $\Delta > 0$ pour $r < 0$, et $\rho^2 > 0$.

Le vecteur ξ^μ est de type espace, donc l'hypersurface de type temps, sauf si $(\partial_{\varphi} f)^2 = (\partial_{\theta} f)^2 = 0$.

1-6 L'hypersurface $g_{\varphi\varphi} = 0$, peut elle être de type nul ?

Il est facile de vérifier que la réponse est négative.

1-7 Etude de la vitesse angulaire sur l'hypersurface $g_{\varphi\varphi} = 0$.

Au chapitre 4-2-4, nous avons calculé la vitesse angulaire du trou noir:

$$d\varphi/dt = [-g_{t\varphi} \pm (g_{t\varphi}^2 - g_{\varphi\varphi}g_{tt})^{1/2}]/g_{\varphi\varphi}$$

Ecrivons cette équation sous la forme:

$$d\varphi/dt = (g_{t\varphi}/g_{\varphi\varphi}) \pm (g_{t\varphi}/g_{\varphi\varphi})(1 - g_{\varphi\varphi}g_{tt}/g_{t\varphi}^2)^{1/2} = d\varphi/dt = (g_{t\varphi}/g_{\varphi\varphi}) \pm (g_{t\varphi}/g_{\varphi\varphi})$$

quand $g_{\varphi\varphi} = 0$, on va avoir les deux solutions correspondant aux deux sens de rotation :

$$d\varphi/dt = (g_{t\varphi}/g_{\varphi\varphi})(-1 + 1) = 0/0.$$

Valeur à déterminer par passage à la limite, et, si z_1 est la racine annulant $g_{\varphi\varphi}$ calculée précédemment:

$$d\varphi/dt = (g_{t\varphi}/g_{\varphi\varphi})(-1 - 1) = -2(g_{t\varphi}/g_{\varphi\varphi}) = +(2GMa/z_1)/0 = +\infty,$$

En utilisant « Maxima », sur un exemple (trou noir critique $M=a=1$) on montre une discontinuité en contre rotation pour $z=z_1$, la vitesse angulaire étant infinie positive d'un côté de la frontière et infinie négative de l'autre (dans les coordonnées de Boyer Lindquist).

On montre que dans la zone critique, la vitesse angulaire des photons est toujours « positive », y compris en contre rotation.

1-8 Etude de la singularité de rotation sur l'hypersurface $g_{\varphi\varphi} = 0$.

On étudie les courbes $d\varphi/dt = f(r)^{45}$ pour un trou noir de Kerr critique. Pour simplifier on a posé $GM = a = 1$, $\theta = \pi/2$ (plan équatorial, qui est le plus caractéristique en métrique de Kerr).

Dans ces conditions il est facile de vérifier que l'ergosurface se situe à $r = 2$, l'horizon double à $r = 1$, la singularité à $r = 0$, l'hyper surface $g_{\varphi\varphi} = 0$ à $r = -1$.

⁴⁵ La dimension de $d\varphi/dt$ est $[L]^{-1}$, avec les unités utilisées. Il faut donc multiplier par c pour obtenir l'inverse d'un temps en sec^{-1} , si on exprime r en mètres. Pour $rd\varphi/dt$, il faut aussi multiplier par c (vitesse)

Entraînement du référentiel (photons en co et contre rotation).

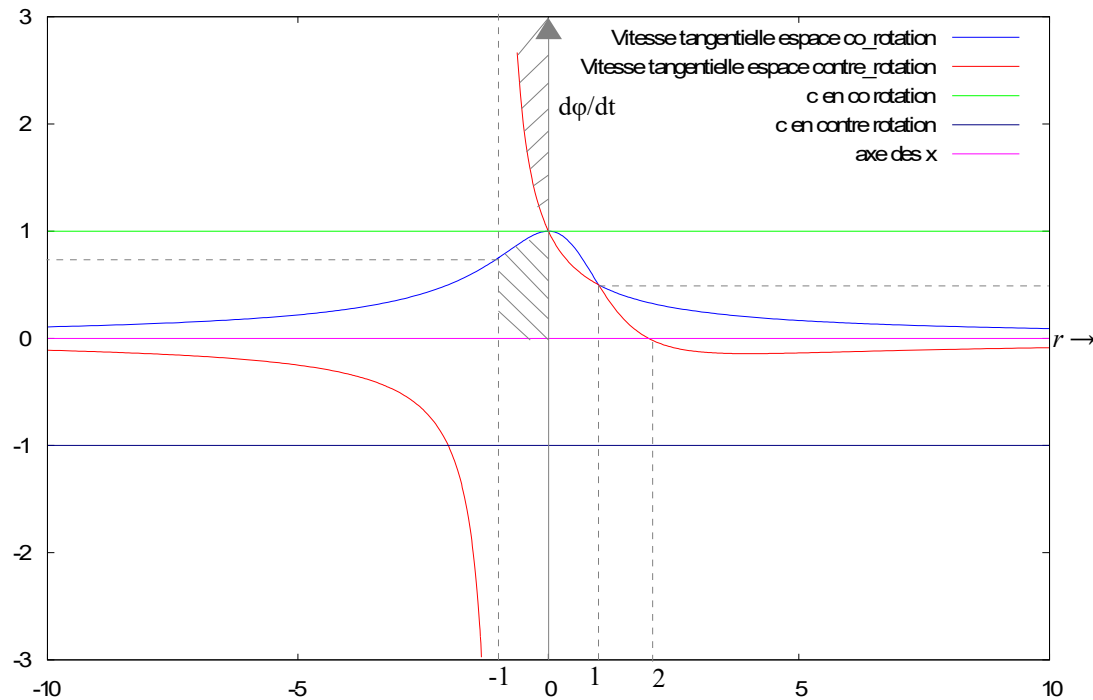


Fig. 2 : Vitesse angulaire $(d\phi/dt)^{46}$ de rotation du trou noir 47 (en contre et co rotation) [54], $G, c, a, M=1$. La zone hachurée correspond à des lignes d'univers de type temps 48 dans la machine temporelle.

1-9 Quelques commentaires sur ces courbes

Comme nous développerons ce point au chapitre 13 nous nous bornerons ici à quelques commentaires.

a- En Contre rotation (courbe rouge) :

On remarque les discontinuités des dérivées des fonctions en $r = 1, r = 0, r = -1$ et que pour :

$r \rightarrow \pm\infty$, $d\phi/dt$ tend vers 0 par valeurs négatives.

$r = 2$ (ergosurface) $d\phi/dt = 0$ du fait de l'entraînement de référentiel et change de signe en deçà.

$r = 1$ (horizon double), $d\phi/dt$ vaut $1/2$

$r = 0$ (singularité), $d\phi/dt \rightarrow 1$

$r \rightarrow -1$, $d\phi/dt \rightarrow \pm\infty$ selon le sens d'approche (discontinuité de la fonction pour $r = -1$) 49

Le sens de rotation s'inverse à nouveau pour $r = -1$ pour revenir au sens d'origine à $+\infty$.

Il peut sembler surprenant que pour $-1 < r < 0$, $d\phi/dt$ pour les photons en contre rotation soit supérieur à $d\phi/dt$ pour les photons en co-rotation. Nous expliciterons cela (entre autres) au chapitre 13.

⁴⁶ On serait tenté de représenter $r \cdot d\phi/dt$, mais compte tenu du caractère obloïde de la métrique de Boyer Lindquist son interprétation physique n'est pas aussi triviale qu'il y paraît (pas évident de mettre en facteur $r \cdot d\phi$ dans cette forme).

⁴⁷ Rappel: Exemple d'un trou noir critique : $M=a=1$.

⁴⁸ Ce qui se vérifie facilement par l'étude du signe du polynôme ds^2 , du second degré en $d\phi/dt$ dont les racines sont données par les courbes rouge et bleues de la figure 2.

⁴⁹ Notons que la discontinuité de rotation à $r = -1$ correspond au sommet du potentiel (chapitre 6§ 7-2) sur l'axe pour ce trou noir extrémal non chargé (calcul fait au chapitre 7-1-2).

b- En Co rotation (courbe bleue)

Notons que $d\phi/dt > 0$ partout et que si $r \rightarrow +\infty$, $d\phi/dt \rightarrow 0$

Le sens de rotation ne s'inverse jamais et reste toujours fini ($0 \leq d\phi/dt \leq 1$) mais même si la fonction est continue, il y a une discontinuité de la dérivée pour $r = 1$.

Remarquons que dans la machine temporelle les régions de type temps sont à l'extérieur de la région entre les courbes rouge et bleues!

Lors de l'étude des boucles temporelles nous verrons que nous serons amenés à poser que $d\phi/d\lambda < 0$, pour que des particules matérielles puissent « remonter le temps ».

Nous reviendrons sur ce point bien troublant, dans la discussion au sujet du sens physique qu'on peut accorder à ces boucles temporelles.

2 -Vecteur de Killing rotation.

$$R^\mu = [0, 0, 0, 1] \rightarrow R_\mu = [g_{\phi t}, 0, 0, g_{\phi\phi}] \rightarrow R^\mu R_\mu = g_{\phi\phi} \quad (9-2-1)$$

Il est nul sur l'hypersurface ($g_{\phi\phi}=0$), positif à l'intérieur et négatif à l'extérieur.

Cela rappelle l'ergosphère qui est relative à l'autre vecteur de Killing (de type temps).

Dans les deux cas, le vecteur de Killing s'annule sur l'hyper surface, mais celle ci n'est pas un horizon, car cette hyper surface n'est pas de type nul.

3- Ergosphère : Annulation du vecteur de Killing de type temps

$$K^\mu = [1, 0, 0, 0] \rightarrow K_\mu = [g_{tt}, 0, 0, g_{t\phi}] \rightarrow K^\mu K_\mu = g_{tt} \quad (9-3-1)$$

qui s'annule bien pour $g_{tt} = 0$.

Pour déterminer le type de l'hypersurface, appliquons le même calcul, mais pour la fonction :

$$f = g_{tt} = r^2 - 2GMr + a^2 \cos^2 \theta = 0 \quad (9-3-2)$$

Calculons le quadrivecteur $\xi^\mu(t, r, \theta, \phi)$ normal à l'hypersurface Σ définie par $g_{tt} = 0$.

On sait que $\xi_\mu = [0, \partial_{\bar{r}} f, \partial_{\bar{\theta}} f, 0]$, avec:

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{r}} f &= 2r - 2GM \\ \partial_{\bar{\theta}} f &= 2a^2 \cos \theta \sin \theta \\ \xi^\mu &= g^{\mu\nu} \xi_\nu = [0, g^{rr} \partial_{\bar{r}} f, g^{\theta\theta} \partial_{\bar{\theta}} f, 0] \end{aligned} \quad (9-3-3)$$

Avec $g^{rr} = -\Delta/\rho^2$, $g^{\theta\theta} = -1/\rho^2$, d'après le tenseur métrique inverse de Kerr

Calculons:

$$\xi^\mu \xi_\mu = -\Delta(\partial_{\bar{r}} f)^2 / \rho^2 - (\partial_{\bar{\theta}} f)^2 / \rho^2 < 0 \text{ pour } \Delta > 0 \quad (9-3-4)$$

Il est de type espace sur les deux ergosurfaces car $\Delta > 0$ à cet endroit : L'hypersurface à laquelle il est normal (ergosurface) est donc de type temps.

Ceci est vrai, « sauf aux pôles », pour les ergosurfaces externe et interne où les vecteurs normaux sont nuls, car à la fois $\Delta = 0$ et $\sin \theta = 0$, ce qui fait que $\partial_{\bar{r}} f$, $\partial_{\bar{\theta}} f$, sont tous les deux nuls, les ergosurfaces étant

en contact avec l'horizon externe aux pôles pour l'ergosurface externe et avec l'horizon interne aux pôles pour l'ergosurface interne.

Pour l'ergosurface interne remarquons de plus qu'elle est en contact avec la singularité (à $r = 0$ et $\theta = \pi/2$)

4- Horizons

On sait qu'une combinaison linéaire de vecteurs de Killing est un vecteur de Killing.

Montrons que le champ de vecteurs de Killing nuls sur l'horizon externe à r_+ est :

$$\chi^\mu = K^\mu + \Omega_H R^\mu \quad (9-4-1)$$

Avec $\Omega_H = a / r_+^2 + a^2$, rotation sur l'horizon qui est une constante qui dépend des paramètres du trou noir, notons

$$K^\mu = (\partial_t)^\mu, (\partial_\phi)^\mu = R^\mu.$$

On a:

$$K^\mu = [1, 0, 0, 0], R^\mu = [0, 0, 0, 1] \text{ donc } \chi^\mu = [1, 0, 0, \Omega_H]$$

$$\chi_\mu = g_{\mu\nu} \chi^\nu = [g_{tt} + g_{t\phi}\Omega_H, 0, 0, g_{\phi\phi}\Omega_H + g_{t\phi}]$$

$$\chi_\mu \chi^\mu = g_{tt} + 2 g_{t\phi}\Omega_H + g_{\phi\phi}\Omega_H^2 = 0 \text{ pour } r^2 + a^2 - 2GMr = 0 \quad (9-4-2)$$

En substituant dans la métrique (9-0-1), rappelée ci-dessous, (avec $\Delta = 0$ sur les horizons).

$$\frac{[(\Delta - a^2 \sin^2 \theta)]}{\rho^2} dt^2 + \frac{[2a \sin^2 \theta (r^2 + a^2 - \Delta)]}{\rho^2} dt d\phi - \frac{\sin^2 \theta [(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta]}{\rho^2} d\phi^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2$$

on obtient :

$$-\sin^2 \theta a^2 / \rho^2 + 2 \sin^2 \theta a (a \cdot (a^2 + r^2) / (\rho^2 (r^2 + a^2)) - (\sin^2 \theta (r^2 + a^2)^2 \cdot a^2) / (\rho^2 (a^2 + r^2)^2)) \equiv 0 \quad (9-4-3)$$

Remarquons que bien que $\Omega_H = a / r_+^2 + a^2$, ait été défini comme le paramètre de rotation du trou noir sur l'horizon externe, comme (9-4-3) est une identité avec "r" dans le cas où $\Delta = 0$, ceci s'applique aux deux horizons (ce qui n'était pas évident a priori).

Vérifions que l'hypersurface est bien de type nul : L'hypersurface est définie par :

$$f = \Delta = r^2 - 2GMr + a^2 = 0 \quad (9-4-4)$$

On voit que la seule coordonnée présente est r , donc le vecteur normal va se réduire à :

$$\xi_\mu = [0, \partial_r f, 0, 0], \text{ et } \xi^\mu = g^{\mu\nu} \xi_\nu = [0, g^{rr} \partial_r f, 0, 0]$$

$$\xi^\mu \xi_\mu = g^{rr} \partial_r f^2 = (\Delta / \rho^2) \cdot (\partial_r f)^2$$

Qui s'annule bien pour $\Delta = 0$ (ρ^2 est toujours positif), donc ξ^μ est bien de genre nul pour $\Delta = 0$ et l'hypersurface associée est de genre nul également.

Remarquons que $\partial_r f = 2r - 2GM = 2(r - GM) \neq 0$ sur les horizons (quand ces horizons existent et sont distincts c'est-à-dire $G^2 M^2 > a^2$). En fait, l'expression est positive sur l'horizon externe et est négative sur l'horizon interne (nulle pour $r = GM$, ce qui correspond à $GM = a^2$, cas d'un trou noir de Kerr critique (horizon double)).

5 - Quelques relations qui simplifient la vie (et les calculs)

$$g_{\phi\phi} + a.\sin^2\theta g_{\phi t} = (r^2+a^2)\sin^2\theta \quad (R1),$$

$$a.g_{\phi\phi} + (r^2+a^2)g_{\phi t} = \Delta.a.\sin^2\theta \quad (R3)$$

$$g_{t\phi} + a.\sin^2\theta g_{tt} = -a.\sin^2\theta \quad (R2)$$

$$a.g_{t\phi} + (r^2+a^2).g_{tt} = -\Delta \quad (R4)$$

6 - Calcul du déterminant de la métrique

Commençons par montrer que:

$$g_{tt}g_{\phi\phi} - g_{t\phi}^2 = -\Delta \sin^2\theta \quad (9-6-1)$$

$$g_{tt}g_{\phi\phi} - g_{t\phi}^2 = -g_{\phi\phi} + \{(2Mr/\rho^2) - 2Mr a^2 \sin^4\theta/\rho^2\} + (r^2+a^2)(2Mr \sin^2\theta/\rho^2) - g_{t\phi}^2$$

Le terme entre { } vaut $g_{t\phi}^2$, il reste alors :

$$g_{tt}g_{\phi\phi} - g_{t\phi}^2 = -g_{\phi\phi} + (r^2+a^2)(2Mr \sin^2\theta/\rho^2) = -g_{\phi\phi} + a^{-1}(r^2+a^2).g_{t\phi} \quad (\text{de R3 on tire})$$

$$g_{tt}g_{\phi\phi} - g_{t\phi}^2 = [a.g_{\phi\phi} + (r^2+a^2)g_{\phi t}]/a = \Delta.\sin^2\theta \quad (9-6-2)$$

Le calcul montre que le déterminant D de la métrique, calculée en coordonnées de Boyer Lindquist, vaut :

$$D = g_{rr}g_{\theta\theta}(g_{tt}g_{\phi\phi} - g_{t\phi}^2) = (\rho^2.\rho^2)/\Delta(g_{tt}g_{\phi\phi} - g_{t\phi}^2) = -\rho^4 \sin^2\theta.$$

Ceci montre qu'il est toujours négatif, en conformité avec la signature Lorentzienne de la métrique. Ce qui confirme que localement on peut toujours définir un référentiel Lorentzien. Il s'annule pour $\rho = 0$, c'est-à-dire sur la singularité en anneau, et pour $\theta = 0$ et π , ce qui correspond à la singularité triviale en coordonnées sphériques.

7- Stationnarité: Vecteur de Killing de type temps non orthogonal aux hypersurfaces de type espace.

Nous avons vu, au chapitre 2, que la condition $V_{[\sigma} V_{\nu]; \mu] = 0$ impliquait l'orthogonalité du vecteur V , défini par $V_\mu = h \partial_\mu f$ aux hypersurfaces définies par $f = \text{constante}$.

Ce critère n'étant pas très simple à mettre en œuvre, nous proposons de le démontrer autrement. Montrons le pour la région extérieure à l'ergosphère, là où le vecteur ∂_t est un vecteur de Killing de type temps et où les hypersurfaces Σ définies par $t = \text{constante}$ ($dt = 0$) sont de type espace (la métrique induite est manifestement spatiale).

L'hypersurface Σ contient les vecteurs de base spatiaux. Si ∂_t était orthogonal à l'hypersurface Σ il serait orthogonal à tous les vecteurs contenus dans cette hypersurface en particulier aux vecteurs de base associés aux coordonnées spatiales.

Montrons que qu'il n'est pas orthogonal à ∂_ϕ . Calculons le produit scalaire $\partial_t.\partial_\phi$.

$$(\partial_t)_\mu (\partial_\phi)^\mu = g_{\mu\nu} (\partial_t)^\nu (\partial_\phi)^\mu \quad \text{avec } (\partial_t)^\nu = (1, 0, 0, 0), (\partial_\phi)^\mu = (0, 0, 0, 1), (\partial_t)_\mu = g_{\mu\nu} (\partial_t)^\nu$$

cela donne:

$$(\partial_t)_\mu = (g_{00}, 0, 0, g_{30}) \quad \text{et donc } (\partial_t)_\mu (\partial_\phi)^\mu = (0, 0, 0, g_{30}) \neq 0$$

car

$$g_{30} = 2a.m.r.\sin^2\theta/\rho^2.$$

Ce produit scalaire s'annule pour $r \rightarrow \infty$, change de signe avec r , et s'annule également pour $r = 0$ si $\theta \neq 0$.

8 – Vecteurs canoniques

Signalons ces vecteurs V , W importants que nous étudierons en détail ultérieurement.

9-Synthèse types des vecteurs de base de la métrique, des hypersurfaces et zones caractéristiques

Item	r	* Type de ∂_θ	Type ∂_t	Type de ∂_ϕ	Type de ∂_r	Type $\partial_t + \Omega \partial_\phi$	Type d'hypersurface	
K+	$r > GM + (G^2 M^2 - a^2 \cos^2 \theta)^{1/2}$		temps	espace	espace	temps		
Ergosurface ext.	$r = GM + (G^2 M^2 - a^2 \cos^2 \theta)^{1/2}$		<i>nul</i>	espace	espace	temps	temps/ <i>nul</i> à $\theta=0$	
Ergosphère			espace	espace	espace	temps	$\theta \neq 0$	
Horizon externe	$r = GM + (G^2 M^2 - a^2)^{1/2}$		espace	espace	$+\infty \rightarrow -\infty$	<i>nul</i>	<i>nul</i>	
			espace	espace	temps	espace		
Horizon interne	$r = GM - (G^2 M^2 - a^2)^{1/2}$		espace	espace	$-\infty \rightarrow +\infty$	<i>nul</i>	<i>nul</i>	
			espace	espace	espace	temps	$\theta \neq 0$	
Ergosurface int.	$r = GM - (G^2 M^2 - a^2 \cos^2 \theta)^{1/2}$		<i>nul</i>	espace	espace	temps	temps/ <i>nul</i> à $\theta=0^{s_0}$	
			temps	espace	espace	temps		
$r=0$	$r=0, \theta \neq \pi/2$		temps	espace	espace	temps		
$r=0$	$r=0, \theta = \pi/2$		-	-			singularité	
$r \leq 0$ {1} Tore de la zone machine temporelle	$r < 0$ {2} Anti-univers/ hors tore	{1} $(r^2 + a^2)(r^2 + a^2 \cos^2 \theta) + 2Ma^2 r \sin^2 \theta = 0$	{2} $(r^2 + a^2)(r^2 + a^2 \cos^2 \theta) + 2Ma^2 r \sin^2 \theta < 0$	temps	{1} <i>nul</i> {2} espace	espace	temps	{1} temps
$r < 0$ {3} Zone machine temporelle	{2} Anti-univers/ hors tore	{3} $(r^2 + a^2)(r^2 + a^2 \cos^2 \theta) + 2Ma^2 r \sin^2 \theta > 0$	{2} $(r^2 + a^2)(r^2 + a^2 \cos^2 \theta) + 2Ma^2 r \sin^2 \theta < 0$	temps	{3} temps {2} espace	espace	temps	

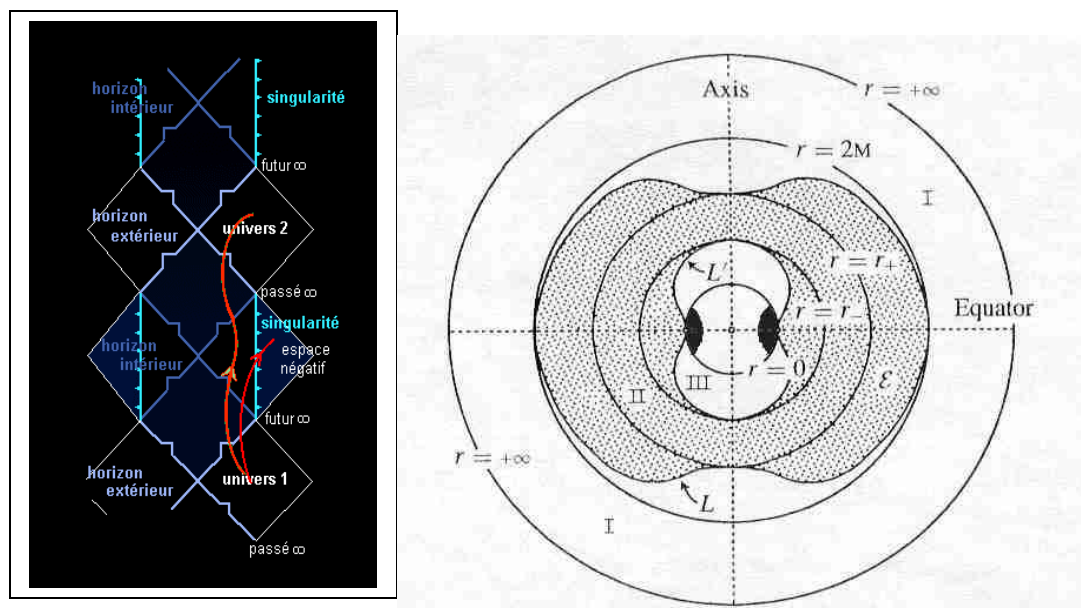
Ce tableau synthétise ces calculs, on remarque que dans la zone de la machine temporelle, deux coordonnées sont de type temps ce qui va expliquer le phénomène.

Définition : En métrique de signature $(+,-,-,-)$, une coordonnée x^μ est dite de type temps si le vecteur contravariant $(\partial_\mu)^\nu$ tangent à x^μ est de type temps $((\partial_\mu)^\nu (\partial_\mu)_\nu > 0)$, une coordonnée x^μ est dite de type espace si le vecteur contravariant $(\partial_\mu)^\nu$ tangent à x^μ est de type espace $((\partial_\mu)^\nu (\partial_\mu)_\nu < 0)$.

* Notons que ∂_θ est partout de type espace.

⁵⁰ Sauf pour $\theta = \pi/2$ (singularité).

10-Diagrammes décrivant les régions délimitées par un trou noir de Kerr



Les trois régions, respectivement de type I ($+\infty > r > r_+$), II ($r_+ > r > r_-$) et III ($r_- > r > -\infty$) sont explicitement représentées sur la figure de droite [38], en coordonnées polaires conformes.

On rappelle que r_+ est l'horizon externe, r_- est l'horizon interne, en gris la région où ∂_t est de type « espace ».

L'ergosphère externe (à l'extérieur de l'horizon externe) est repérée par la lettre L , l'ergosphère interne (à l'intérieur de l'horizon interne) est repérée par la lettre L' sur la figure.

A noter la forme de cette ergosphère interne qui est semblable à celle de l'ergosphère externe mais en inversant le rôle de l'axe et de l'équateur.

On a également représenté en noir, le tore de la machine temporelle en coupe, entièrement situé à $r < 0$ pour un trou noir de Kerr.

Sur la figure de gauche [50] on présente la structure de l'extension analytique maximum, sur un diagramme de Carter Penrose.

Les deux lignes d'univers partent d'un univers de type I, traversent r_+ , entrent dans un univers de type II puis traversent r_- et entrent dans un univers de Type III, une des lignes d'univers (à droite) traverse la singularité en anneau et finit dans l'espace temps négatif, l'autre traverse r_- de l'intérieur vers l'extérieur pour atteindre un autre univers causalement déconnecté et poursuivre son chemin.

A noter que cette deuxième ligne d'univers ne peut pas exister dans un Trou noir de Kerr résultant d'un effondrement stellaire.

10 Application au cas de l'électron de Kerr

Nous disposons maintenant des éléments qui vont permettre d'étudier ce cas particulier.

1- Mise en évidence par les équations du facteur gyromagnétique de 2

Extrait du texte de B. Carter

« Le paramètre a se couple d'une part avec la masse pour donner le moment angulaire et, comme (11) le montre, il se couple aussi avec la charge pour donner un dipôle magnétique de moment asymptotiquement égal à $e.a$.

Le rapport gyromagnétique vaut donc e/m . On remarque que nous n'avons aucun degré de liberté là dessus. Cela vaut la peine de faire remarquer que cela correspond avec une grande précision à ce que donne l'équation de Dirac, pour l'électron par exemple.

Donc, en dépit du fait que les paramètres des solutions ne contiennent que deux rapports indépendants, il est possible de les choisir de telle sorte qu'ils correspondent aux paramètres d'un électron, à savoir (dans le système d'unités où $\hbar = 1$), $m \approx 10^{-22}$, $ma \approx 1/2$ et $e^2 \approx 1/137$. Nous en tirons $a \approx \frac{1}{2} m^{-1} \approx 10^{22}$, $e \approx 1/12$.

La valeur de l'échelle des longueurs alors fixée par a est relativement grande, elle est de l'ordre de grandeur de l'échelle de longueur de Compton. Par contre la valeur de m est si petite, que le champ est très voisin du cas limite où $m = 0$ avec e et a comme seuls paramètres. »

2- Influence relative des paramètres sur la métrique

Examinons la « sur criticité » de la solution de Kerr Newman de l'électron de Kerr

Il faut ramener les différents paramètres aux mêmes unités pour pouvoir les comparer.

On voit d'après les paramètres que le trou noir associé à l'électron est hautement « sur critique » car :

$$a^2 + e^2 \gg m^2,$$

En effet dans le système d'unités « naturelles » cela donne :

$$10^{44} + 1/137 \gg 10^{-44} \quad (10-2-1)$$

On a un rapport de 10^{88} entre a^2 et m^2 !!!

Autant dire que l'espace temps défini est quasiment « plat »

3- Masse et charge électrique

La masse de l'électron dont nous parlons qui est génératrice du champ est la masse gravitationnelle. Nous avons valorisé cette masse gravitationnelle à la masse « inerte » de l'électron bien connue (en particulier par des expériences de physique des particules) mais rappelons qu'en vertu de [3] cette hypothèse est arbitraire, car rien a priori ne les contraint à être égales. Mais, dans ce qui suit, nous considérerons cette hypothèse empiriquement établie.

On trouve un rapport d'environ 10^{42} entre la contribution de la « charge et celle de la « masse » à la « masse gravitationnelle » du trou noir. C'est l'ordre de grandeur du rapport de l'interaction électromagnétique et l'interaction gravitationnelle. (Ces contributions sont bien en m^2 et e^2 d'après les lois de Newton et de Coulomb).

Observons pourtant que dans un cas c'est l'interaction gravitationnelle seule qui est concernée (l'énergie

électromagnétique intervient via le tenseur (symétrique) énergie impulsion électromagnétique en relativité Générale. Ce tenseur est construit à partir du tenseur (antisymétrique) électromagnétique caractérisant le champ de l'interaction électromagnétique. Dans l'autre cas, ce sont deux interactions a priori différentes qu'on compare. La phénoménologie de l'action gravitationnelle de l'énergie électromagnétique est très différente de celle de l'interaction électromagnétique, comme nous aurons l'occasion de le voir.

Au niveau de l'énergie, il paraît naturel que celle ci soit proportionnelle à l'intensité d'une interaction: le « travail » (énergie) effectué par une « force » étant proportionnel à l'intensité de l'interaction. Cela peut expliquer pourquoi ce rapport est conservé. Mais le « couplage » de cette « énergie » avec le champ électromagnétique et le champ gravitationnel peut être différent.

On a ce rapport dans l'exemple de l'électron, parce que précisément l'électron est une particule chargée sensible aux deux interactions. Rappelons que ces paramètres sont issus de la mécanique quantique (pour un électron nu).

4- Echelle de « a » en unités MKS

Ici l'échelle de « a » est donnée en unités naturelles. On peut trouver l'échelle en unités SI par une analyse dimensionnelle en revenant au SI

$\hbar = 6,62 \cdot 10^{-34}$ et a les dimensions d'une action soit $[M][L]^2[T]^{-1}$

$a = 1/2m$ doit avoir la dimension d'une longueur

l'équation aux dimensions va alors s'écrire :

$a = \hbar / (2 m_e \cdot c)$ avec m_e = masse de l'électron.

$$[L] = [M][L]^2[T]^{-1} / ([M][L][T]^{-1}) \text{ soit } 1,05 \cdot 10^{-34} / (2 \times 0,9 \cdot 10^{-30} \times 3 \cdot 10^8) \approx 1,9 \times 10^{-13} \text{ m} \quad (10-2-1)$$

Ce qui correspond à la valeur de a exprimée en unités naturelles, environ 10^{22} fois la longueur de Planck.

On voit comment la « rotation » est le facteur ultra dominant de cette solution et comment le spin « élargit » incroyablement l'échelle de l'objet (taille de l'anneau).

Remarquons aussi que la contribution ultra dominante à l'énergie du trou noir est son « énergie de rotation », mais que compte tenu du couplage de cette énergie avec la gravitation à partir d'une certaine distance, son action n'est plus prépondérante elle est dominée par l'énergie électromagnétique qui elle-même va être dominée par l'énergie de masse.

Notons qu'un Trou noir statique de Schwarzschild, de même masse, aurait un rayon d'horizon 10^{22} fois inférieur à la distance de Planck, ce qui n'a pas de sens physique en mécanique quantique.

5- Echelle de grandeur des paramètres caractéristiques supplémentaires

En plus des échelles de grandeurs, déjà données précédemment, intéressons nous à :

6- Zones de domination des accélérations liées à la masse, au spin, à la charge

Pour les paramètres de l'électron, regardons ce que cela donne numériquement (environ) en unités « naturelles : $G = c = \hbar = 1$). Les longueurs sont exprimées en longueurs de Planck $l_p = 10^{-34} \text{ m}$ environ. On se place dans l'espace temps positif ($r > 0$) et sur l'axe de rotation on aurait sans doute des résultats très différents hors de l'axe mais la complexité ne permet pas d'obtenir une solution analytique.

$$d^2r/d\tau^2 \approx - 10^{-22} \cdot r^2 / (a^2 + r^2)^2 + (1/137) \cdot r / (a^2 + r^2)^2 + 10^{22} / (a^2 + r^2)^2 \quad (10-6-1)$$

Au delà de $10^{22} l_p$, c'est à dire 10^{13} m environ, c'est l'attraction (asymptotiquement en $1/r^2$) liée à la masse qui est dominante, elle prend l'avantage sur l'énergie répulsive de rotation (asymptotiquement en

$1/r^4$).

L'énergie répulsive « électromagnétique » (asymptotiquement en $1/r^3$) est dominée par la gravitation dès $(10^{22})/137 \text{ lp}$ soit environ 10^{-15} m . Ceci correspond à la « taille » du noyau d'hydrogène (proton). Est-ce à dire que cette « taille » qui délimite la zone d'interaction collisionnelle où une particule de test sent une résistance (est repoussée) par la particule considérée est déterminée par l'équilibre masse/charge ?

Cela est compatible avec le fait que plus l'énergie de la particule de test est grande, plus elle peut pénétrer au cœur de la particule.

L'énergie répulsive « électromagnétique » (en $1/r^3$) reprend l'avantage sur l'énergie de rotation (en $1/r_4$) à 137.10^{22} lp (10^{-11} m), mais elle est dominée par la gravitation

Cela est une distance relativement importante (à l'échelle de l'atome), mais en fait l'accélération générée A_e est si faible, qu'elle n'est pas mesurable.

On sait par exemple qu'elle est inférieure d'un facteur $(1/137)^2$ à l'énergie de gravitation A_g liée à la masse qui vaut :

$$A_g = -GM/r^2 = 6.67.10^{-11}.10^{-30}/10^{-22} = 10^{-18} \text{ m/sec}^2 \text{ soit } A_e < 10^{-22} \text{ m/sec}^2$$

A titre de comparaison, la valeur de l'accélération de l'interaction électromagnétique générée par un électron dépend de la charge de la particule de test, il n'est pas correct de faire des comparaisons puisque dans l'autre cas c'est indépendant.

Mais, si je prends l'exemple de 2 électrons juste pour avoir un ordre de grandeur on trouve :

$$f = e.e/4\pi\epsilon_0 r^2 = m.\gamma, \text{ avec } 1/4\pi\epsilon_0 = 9.10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2, e = 1,6.10^{-19} \text{ C}, m = 0,9.10^{-30} \text{ kg}, r = 10^{-11} \text{ m}$$

Cela donne $9.10^9. (1,6.10^{-19})^2 / 10^{-22} = 0,9.10^{-30} . \gamma$ soit $\gamma = 2,56.10^{24} \text{ m/sec}^2$, soit évidemment 10^{46} , fois plus, ce qui montre que la mesure de A_e est quasi impossible à cette échelle, le moindre champ électromagnétique masquant complètement le phénomène.

7- Positionnement et valeur des puits et pics de potentiel sur l'axe :

Nous allons utiliser les résultats obtenus précédemment.

8-Application numérique dans le cas de l'électron de Kerr:

En prenant les paramètres de l'électron, en unités « naturelles » soit :

$$Ma \approx 1/2, Q^2 \approx 1/137, M \approx 10^{-22}, \quad r_{\max} = [Q^2 - (Q^4 + 4a^2M^2)^{1/2}]/2M \text{ donne :}$$

$$r_{\max} = [1/137 - ((1/137)^2 + 4.(1/2)^2)^{1/2}]/2. 10^{-22} \approx -0,5.10^{22} \quad (10-7-1)$$

Le maximum se produit pour une valeur négative de r (ce qui est compatible avec le cas général) qui est de l'ordre de grandeur du rayon de Compton de l'électron.

Pour ce qui concerne l'énergie « cinétique » (d'une particule neutre) nécessaire pour franchir cette barrière de potentiel :

$$\rho > 2M^2(Q^4 + 4a^2M^2)^{-1/2}$$

Soit avec les valeurs de l'électron : $\rho > 2M^2, \rho > \approx 2.10^{-44},$

On en tire de la définition de ρ : $\rho = (e^2 - m^2)/m^2, e^2/m^2 - 1 > 2.10^{-44},$

En fait dans ce cas la barrière de potentiel est minuscule, une énergie cinétique très faible suffit à la franchir, ceci est lié au ratio a/m très élevé de l'électron.

9- Taille de la machine temporelle associée à l'électron

On verra plus loin, que la métrique de Kerr-Newman contient une machine « temporelle » d'étendue finie, dont la limite est donnée par la condition $g_{\varphi\varphi} = 0$. On peut se demander quelle est son extension maximum en r dans ce cas d'un Trou noir de Kerr Newman surcritique.

De la condition $g_{\varphi\varphi} = r^2 + a^2 + \rho^{-2} (2mr - e^2) a^2 \sin^2 \theta \leq 0$, (équation (27) p.1565), B. Carter, dans son article, déduit que cette extension satisfait aux conditions :

$r^2 < e^2$ pour $r > 0$ et $r^2 < \text{Max} (a^2, e^2, 4m^2)$ pour $r < 0$. (Ces valeurs sont données en unités « naturelles » pour les convertir en unités SI, il faut utiliser l'analyse dimensionnelle).

On peut compléter l'analyse de B. Carter en développant, la condition $g_{\varphi\varphi} = 0$. On obtient:

$$(r^2 + a^2)^2 - a^2 \sin^2 \theta \{ r^2 + a^2 - 2mr + e^2 \} = 0 \quad (10-9-1)$$

Dans un TN de Kerr ($e = 0$), nous avons montré que l'extension maximum a lieu pour $\theta = \pi/2$.

En tenant compte que l'électron de Kerr correspond à un TN sans horizon, $\{ r^2 + a^2 - 2mr + e^2 \} > 0$, calculons $\partial g_{\varphi\varphi} / \partial \theta = -2a^2 \sin \theta \cos \theta \{ r^2 + a^2 - 2mr + e^2 \}$. Cette expression s'annule pour $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$ car $r^2 + a^2 - 2mr + e^2 > 0$.

Pour $\theta = 0$, (10-9-1) nous montre qu'il n'y a pas de solution. Donc le maximum est pour $\pi/2$, ce que le calcul de la dérivée seconde $\partial^2 g_{\varphi\varphi} / \partial \theta^2 = -2a^2 [\cos^2 \theta - \sin^2 \theta] \{ r^2 + a^2 - 2mr + e^2 \} > 0$, pour $\theta = \pi/2$, confirme.

Le maximum de r se calcule donc par (10-9-1) avec $\theta = \pi/2$. L'équation (10-9-1) devient:

$$r^4 + a^2 r^2 + 2ma^2 r - a^2 e^2 = 0 \rightarrow r^4 / a^2 + r^2 + 2mr - e^2 = 0 \quad (10-9-2)$$

qu'on peut résoudre analytiquement par la méthode des radicaux (mathematica4 le donne) mais le résultat est peu exploitable. Pour les valeurs numériques de l'électron de Kerr : $m = 10^{-22}$, $e^2 = 1/137$, $a = 10^{22}$, $a^2 \gg e^2 \gg m^2$, avec $r < a$ (cf B.Carter), alors ceci donne: $r^4 \cdot 10^{-44} + r^2 + 2r \cdot 10^{-22} - 1/137 = 0$.

9-1 Extension de la machine temporelle dans l'univers positif

Pour $r = r^+ > 0$, on voit que la solution est proche de $r^2 = 1/137$, puisque numériquement cela donne:

$$(137^{-2})(10^{-44}) + 1/137 + 2.(137)^{-1/2} \cdot 10^{-22} - 1/137 \sim 10^{-23} > 0$$

Pour $r^2 = 1/138$ l'expression devient: $(138^{-2})(10^{-44}) + 1/138 + 2.(138)^{-1/2} \cdot 10^{-22} - 1/137 < 0$

donc: $(1/138)^{1/2} < r^+ < (1/137)^{1/2}$

9-2 Extension de la machine temporelle dans l'univers négatif

Pour $r = r^- < 0$, on obtient pour la valeur $r^2 = 1/137$:

$$(137^{-4})(10^{-44}) + 1/137 - 2.(137)^{-1/2} \cdot 10^{-22} - 1/137 \sim -10^{-24} < 0$$

Pour la valeur $r^2 = 1/136$ on obtient:

$$(136^{-4})(10^{-44}) + 1/136 - 2.(136)^{-1/2} \cdot 10^{-22} - 1/137 > 0$$

donc $-(1/136)^{1/2} < r^- < -(1/137)^{1/2}$ (exprimé en longueur de Planck).

Il y a une légère dissymétrie entre l'extension de la machine temporelle côté positif et côté négatif, la machine temporelle a une extension légèrement supérieure côté négatif que côté positif.⁵¹

10- Calcul des racines de l'équation $g_{\varphi\varphi} = 0$

Cette Carter time machine s'étend dans la zone où $g_{\varphi\varphi}$ est positif (coordonnée φ de type temps). La limite est donnée par $g_{\varphi\varphi} = 0$. Comme cela se produit pour $r < 0$ (cas de Kerr) on pose $z = -r$ pour avoir des valeurs > 0 .

On sait que ce type d'équation a une solution analytique (pénible à calculer à la main). Les solutions en z sont fonction des paramètres a , M , et de la variable θ . Autrement dit : $z = f(\theta)$.

On a montré que la valeur maximum se produit pour $\theta = \pi/2$.

L'expression se simplifie et se ramène à : $z(z^3 + a^2z - 2Ma^2) = 0$, qui a une racine réelle liée à l'équation du troisième degré : $z^3 + a^2z - 2Ma^2 = 0$, du type « $z^3 + p.z + q = 0$ » dont nous avons vu que le discriminant $q^2/4 + p^3/27 = M^2a^4 + a^6/27 > 0$, indique qu'il n'y a qu'une racine réelle, qu'on obtient par la méthode habituelle utilisant la formule de Cardan :

$$z = [Ma^2 + (M^2a^4 + a^6/27)^{1/2}]^{1/3} + [Ma^2 - (M^2a^4 + a^6/27)^{1/2}]^{1/3} \quad (10-10-1)$$

On voit que pour $a \gg M$, en développant aux ordres non nuls le premier terme.

$$[Ma^2 + (M^2a^4 + a^6/27)^{1/2}]^{1/3} = [Ma^2 - (a^6/27(1 + 27M^2/a^2)^{1/2})]^{1/3} \approx [Ma^2 + (a^3/\sqrt{27}(1 + 27M^2/2a^2))]^{1/3} \approx [(a^3/\sqrt{27}(1 + \sqrt{27}M/a + 27M^2/2a^2))]^{1/3} \approx (a/27^{1/6})(1 + (\sqrt{27}(M/3a) + 27M^2/6a^2)).$$

Par un calcul semblable le deuxième terme devient :

$$[Ma^2 - (M^2a^4 + a^6/27)^{1/2}]^{1/3} \approx (a/27^{1/6})(-1 + (\sqrt{27}(M/3a) - 27M^2/6a^2)),$$

$$\text{donc:} \quad z \approx 2(a/27^{1/6})(\sqrt{27}(M/3a)) = 2Ma\sqrt{3}/3a\sqrt{3} = 2M. \quad (10-10-2)$$

z tend vers « $2M$ » (en unités « naturelles »), c'est-à-dire quelque chose de tout petit (10^{-22} fois la longueur de Planck, ce qui n'a pas de sens physique dans le cadre du modèle standard).

Nous avons vérifié que $e^2 \ll a^2$, ici nous avons montré que l'extension liée à la masse était de l'ordre de $2m \ll a$.

Ceci montre bien que c'est a qui est le critère majorant.

11-La violation de causalité est sans conséquences physiques dans le cas de l'électron

C'est donc l'extension liée à la charge qui est prédominante. Cette zone de violation de causalité, reste inférieure à la longueur de Planck. On est donc fondé à supposer qu'elle n'a pas d'impact physique.

12-Electron et positron

Le même objet (la singularité en anneau), avec les paramètres de l'électron, selon qu'on le considère depuis le demi espace où $r > 0$, peut être considéré comme un électron (charge = e , masse = m , spin = $1/2$) ou selon qu'on le considère depuis le demi espace où $r < 0$, se comporte comme un objet qui aurait une masse = $-m$ et une charge = $-e$ et un spin $-1/2$, c'est à dire l'antiparticule associée à l'électron, le positron.

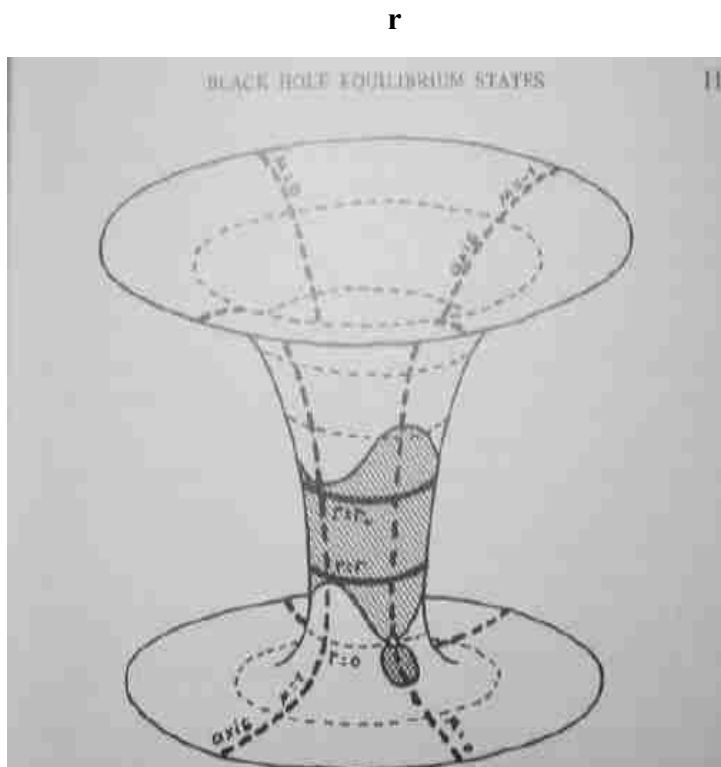
Par ailleurs les équations et leurs conséquences montrent que ce positron, aurait une masse gravitationnelle active négative (au sens de la RG) et générerait un champ gravitationnel répulsif.

⁵¹ Cette valeur de r paraît non physique, mais rappelons que $r = 0$, est un disque de rayon a , donc r est physique.

11-Machine temporelle :

1- Rappel des régions d'un trou noir

Le point le plus remarquable est que la violation flagrante de causalité dans une région de l'espace temps, où des boucles temporelles sont possibles, est liée au fait que dans cette région très singulière (La Carter time machine), de topologie torique, bordée en son intérieur par la singularité, deux coordonnées sont de type temps (cf. définition chap. 9-9), dont une périodique.



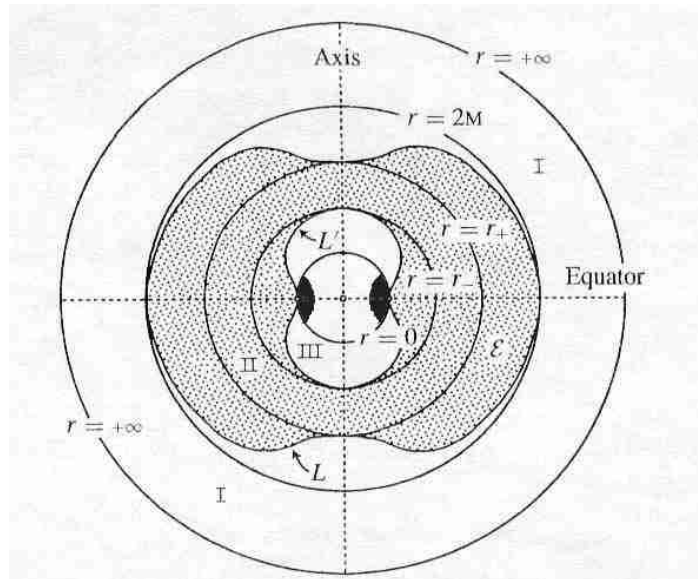
Une section à t et φ constants de l'espace temps de Kerr est représenté ci dessus⁵². La coordonnée r ⁵³ se lit les « méridiens » sur la surface de type hyperboloïde (à μ constant). La coordonnée θ est en représentation polaire ($\mu = \cos\theta$). On voit en particulier les horizons extérieur (r_+) et intérieur (r_-), la singularité (point à $r = 0$ et $\mu = 0$ qui est un point de l'anneau), la machine temporelle petite zone hachurée sous la singularité (cette représentation n'en montre pas la topologie torique), les ergosphères, zones hachurées, au dessus de (r_+) et au dessous de (r_-), l'axe de rotation ($\mu = 1$).

On peut représenter également une coupe (à t , φ constant) par un plan passant par l'axe de symétrie de l'espace temps de Kerr en coordonnées conformes, qui montrent la topologie « torique » de la machine temporelle⁵⁴.

⁵² Figure empruntée à B. Carter: « Présentation at Christchurch, N.Z, August 2004 ».

⁵³ $r = \text{constante}$ est un ellipsoïde ayant pour axe de symétrie l'axe de rotation et de taille dépendant de r : La représentation est intuitive, mais pas habituelle (on fait habituellement des coupes à t et $\varphi = \text{constante}$, comme la figure suivante le montre).

⁵⁴ Figure empruntée à « Kerr Space Time » B. O'Neil AK Peters



Les trois régions, respectivement de **type I** ($+\infty > r > r_+$), **II** ($r_+ > r > r_-$) et **III** ($r_- > r > -\infty$) sont explicitement représentées sur la figure de droite [38], en coordonnées polaires conformes. On rappelle que r_+ est l'horizon externe, r_- est l'horizon interne, en gris la région où ∂_t est de type « espace ».

L'ergosphère externe (à l'extérieur de l'horizon externe) est repérée par la lettre L , l'ergosphère interne (à l'intérieur de l'horizon interne) est repérée par la lettre L' sur la figure.

A noter la forme de cette ergosphère interne qui est semblable à celle de l'ergosphère externe mais en inversant le rôle de l'axe et de l'équateur.

On a également représenté en noir, le tore de la machine temporelle en coupe, entièrement situé à $r < 0$ pour un trou noir de Kerr.

2- Deux dimensions sont simultanément de type temps

Mise en évidence simple de la possibilité de boucle temporelle

On peut le voir très simplement sur la métrique de Kerr :

Pour $|r| \ll 2GM$, $\theta = \pi/2$, et $t, r = \text{constante}$, la métrique $(+, -, -, -)$ se réduit au premier ordre à :

$$ds^2 \approx -a^2(1 + \frac{2GM}{r})d\varphi^2 \quad (11-2-1)$$

Expression qui peut être de type temps pour $r < 0$.

On peut expliquer simplement cela par le fait que dans cette zone, et c'est la seule où cela se produit, deux vecteurs de base, associés à deux coordonnées (linéairement indépendantes, donc deux dimensions) de la métrique à 4 dimensions de Kerr, les vecteurs ∂_t et ∂_φ en l'occurrence, sont simultanément de type temps (les deux autres sont de type espace).

On peut objecter, à juste titre, que la métrique contient des produits croisés $dt.d\varphi$ et que le genre des vecteurs ∂_t et ∂_φ ne détermine pas à lui seul, la nature du ds^2 caractérisant le genre de la trajectoire.

Nous l'avons vu dans le cas de l'ergosphère (chap. 4-2), où malgré le fait que les quatre vecteurs ∂_μ associés aux coordonnées étaient de type espace, il existait des trajectoires de type temps, avec la contrainte qu'elles devaient tourner dans le sens de rotation du trou noir pour que le produit croisé $dt.d\varphi$ soit de type temps.

Ici la pathologie est différente, car si on pose $t = \text{constante}$, soit $dt = 0$ la métrique devient alors « diagonale » ($dt.d\varphi = 0$) et malgré cela on peut décrire une boucle temporelle, c'est-à-dire à $(t = t_0, r = r_0, \theta = \theta_0)$ constants, en faisant varier seulement φ de φ_0 à $\varphi_0 + 2\pi$, décrire une trajectoire de type temps

(temps propre >0) et revenir aux mêmes coordonnées à $(t = t_0, r = r_0, \theta = \theta_0, \varphi = \varphi_0)$ du fait que dans la métrique de Boyer Lindquist on identifie φ et $\varphi + 2\pi$.

Ce résultat est insensible au sens de rotation (il n'y a pas de produit croisé dans la métrique pour $dt = \text{constante}$). Par ailleurs on peut montrer que $d\varphi=0 \rightarrow d\varphi/dt=0/0$ pour la lumière!

Une boucle est un invariant topologique

Comme le souligne B. Carter [7], sauf si la boucle résulte d'une identification non nécessaire, ou injustifiée, ce qui n'est pas le cas ici, celle-ci présente un caractère topologique indépendant des coordonnées, puisque la courbe paramétrée par le temps propre (paramètre affine classique pour une courbe de type temps) repasse par les mêmes coordonnées (qui étiquettent les points de la variété, donc par le même point de la variété⁵⁵) pour deux points de la courbe de paramètres affines différents.

On peut aussi remonter le temps

L'examen plus détaillé montrera que dans ce contexte on peut aussi décrire des trajectoires qui peuvent remonter le cours du temps, mais qui seront sensibles au sens de rotation (le produit croisé $dt.d\varphi$ n'est plus nul dans ce cas).

Il faudra dans ce cas décrire des trajectoires en « contre rotation ».

Nous donnerons le principe de la méthode, mais ne traiterons pas en détail ce point⁵⁶ (plus lourd en calcul), le critère précédent étant caractéristique à lui seul de la pathologie.

3- Et pourtant l'observateur local ne perçoit qu'une dimension de temps !

Localement, pour l'observateur surfant dans la Carter time machine, il n'y a qu'une dimension de temps : son temps propre qui s'écoule bien vers le futur.

Globalement cela n'est pas incompatible avec le fait que, dans une région donnée, deux coordonnées du système de coordonnées globales de la variété soient de type temps.

L'étude de la géodésique « chute libre » dans cette zone, nous fournit un indicateur intéressant montrant que la signature de la métrique est bien Lorentzienne dans l'espace tangent « chute libre ».

.

⁵⁵ Nous commenterons plus en détail ce point au chapitre 14

⁵⁶ B. Carter en donne les grandes lignes dans [7] et cela est traité en détail dans [37]

12-Voyage sur une boucle temporelle

1-Introduction

Une trajectoire, représentée par une courbe paramétrée $x^\mu(\lambda)$, où $x^\mu(t, \varphi, r, \theta)$, pour être une boucle temporelle, doit être de type temps (le temps propre de « l'observateur » attaché à cette trajectoire doit être positif) :

$$g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu > 0 \quad ^{57} \quad (12-1-1)$$

En considérant t, r et θ constants, on peut paramétrer la trajectoire comme suit⁵⁸ :

$$x^\mu(\lambda) = (t_0, -\lambda + \varphi_0, r_0, \theta_0) \quad (12-1-2)$$

Avec: $0 < \lambda < 2\pi$ (12-1-3)

Pour une révolution.

En général, dans cette formule, on omet les constantes $t_0, \varphi_0, r_0, \theta_0$ qui peuvent être égalées à zéro, par un changement d'origine des coordonnées, sans nuire à la généralité du problème.

2- Complexité opérationnelle du problème

En relativité générale on arrive très rapidement à une complexité opérationnelle qui décourage. L'avantage de la boucle temporelle simple à t, r, θ constants, est que comme beaucoup de paramètres sont constants et qu'on utilise principalement les dérivées dans le calcul, beaucoup vont être nulles, ce qui va simplifier sérieusement les calculs. Le seul paramètre variable va être φ . Mais, bien que ce soit le cas le plus simple, le calcul est laborieux, il est développé en détail, (j'ai souvent répété des formules pour éviter de trop naviguer dans le texte) pour bien décortiquer la démarche et j'ai commenté abondamment les points du calcul qui me paraissaient importants.

3- Boucle temporelle

Nous allons calculer la valeur absolue de l'accélération $|A^\mu|$ pour une boucle temporelle (CTC) dans le plan équatorial ($\theta_0 = \pi/2$) pour un Trou Noir de Kerr ($Q=0$)

Dans le cas que nous considérons, rappelons que le paramétrage de la courbe est :

$$x^\mu(\lambda) = t(\lambda), \varphi(\lambda), r(\lambda), \theta(\lambda) = [t_0, -\lambda + \varphi_0, r_0, \theta_0 = \pi/2] \quad (12-3-1)$$

Comme on s'en doute une telle trajectoire n'a rien d'une géodésique et pour s'y maintenir, il va falloir lutter contre des accélérations provoquées par le voisinage de la singularité.

4- Début du voyage

Imaginons que des astronautes intrépides veuillent goûter aux délices des boucles temporelles, nul doute qu'il y aura sûrement des amateurs, au vu des défis parfois extravagants qu'on constate dans notre bas monde.

Pour orbiter sur des boucles temporelles, il faut déjà se rendre dans la zone où elles se produisent. Si on part de l'univers positif (région de type I) dans un vaisseau spatial, l'accès le plus simple à cette zone étant par l'axe du trou noir, il convient d'abord d'atteindre cet axe à bonne distance du trou noir. De là il faut prendre de l'élan pour franchir la barrière de potentiel générée par la singularité du trou noir (cf. chapitre 7-3), en traversant au passage les deux horizons (externe et interne⁵⁹ qui peuvent être confondus

⁵⁷ On utilise la signature (+,-,-,-) pour la métrique, les dérivées de x^μ par rapport à λ sont notées x'^μ .

⁵⁸ Dans l'équation qui suit on choisit de poser $\lambda = \varphi$, ce qui est parfaitement valide du fait que c'est le seul paramètre variable. La métrique permettra, quand c'est utile, de normaliser les équations par rapport au temps propre.

⁵⁹ L'horizon interne étant un horizon de Cauchy, le traverser revient à quitter l'univers auquel nous appartenions ce qui pose quelques problèmes de crédibilité physique dans le cas d'un TN de Kerr physique (non éternel) puisque quand on se rapproche de cet horizon on se rapproche de la création du TN. Au moment où on franchirait cet horizon, le TN (et donc cet horizon) n'existe pas encore. Pour un TN éternel c'est plus complexe, mais c'est un cas d'école!

dans le cas d'un trou noir critique), nonobstant les périls déjà signalés. En pénétrant à l'intérieur de l'anneau en son centre (on va choisir un trou noir qui s'y prête) on va pouvoir atteindre la zone désirée. On a vu que pour un trou noir critique il fallait « brûler » une énergie de l'ordre de grandeur (70%) de l'énergie de masse du vaisseau pour franchir la barrière de potentiel. En fait on devrait en consommer un peu moins du fait qu'on ne va pas très loin dans l'anti-univers pour manœuvrer et orbiter sur une boucle temporelle.

C'est à ce dernier point qu'on va s'intéresser plus particulièrement.

5- Calcul des contraintes subies par les voyageurs

Dans notre exemple nous considérons un trou noir de Kerr ($Q = 0$) donc les seules interactions en présence sont gravitationnelles.

Pour bien préciser les choses, rappelons qu'au voisinage du trou noir (comme de toute masse) on est l'objet de plusieurs phénomènes :

- i. Des « forces » de marées, que l'on subit même si on est sur une géodésique (en chute libre),
- ii. Et des « forces » d'accélération (qu'on subit que si on n'est pas sur une géodésique: c'est-à-dire si on n'est pas en chute libre)

Il faut évidemment calculer les deux.

6- Forces de Marée

On rappelle que ces forces sont liées à la déviation géodésique qui fait que les géodésiques ne restent pas parallèles quand on se rapproche du corps massif, ce qui fait que si le corps est rigide il va subir des contraintes. Ces forces s'exercent indépendamment de la présence d'une accélération (elles sont donc ressenties sur une trajectoire inertielle « chute libre »)

Le calcul des forces de marée nécessite de calculer le tenseur de Riemann dans le vide (il se réduit au tenseur de Weyl) c'est un calcul assez lourd qui est fait [40], [37] et en annexe 17. On le calcule en général dans un référentiel particulier (dans une tétrade de vecteurs nuls : formalisme de Newman-Penrose) où il prend sa forme la plus simple (qui permet de calculer alors simplement la composante radiale et la composante transversale).⁶⁰

On le projette ensuite sur la tétrade comobile attachée aux « voyageurs », les forces de marée, devant s'évaluer dans le référentiel localement inertiel. En fait il n'y a que deux composantes à calculer dans ce référentiel : La composante longitudinale et la composante transversale.

Pour un trou noir de Kerr Newmann, pour $\theta = 0$, elles sont données respectivement par :

$$\begin{aligned} T_{\text{long}} &= -\frac{ml}{8w^2M^2} \frac{1}{(\bar{r}^2 + \bar{a}^2)^3} [2\bar{r}(\bar{r}^2 - 3\bar{a}^2) - \bar{Q}(3\bar{r}^2 - \bar{a}^2)] , \\ T_{\text{trans}} &= \frac{m}{8lM^2} \frac{1}{(\bar{r}^2 + \bar{a}^2)^3} [\bar{r}(\bar{r}^2 - 3\bar{a}^2) - \bar{Q}(\bar{r}^2 - \bar{a}^2)] . \end{aligned} \quad (12-6-1)$$

En posant⁶¹:

$$\begin{aligned} r &= M\bar{r}, \\ a &= M\bar{a}, \\ Q &= M\bar{Q}. \end{aligned}$$

⁶⁰ En fait, aujourd'hui, il existe dans Mathématique des programmes qui permettent de le calculer par simple paramétrage de la métrique associée. Mais nous donnons ici la démarche historique.

⁶¹ Les variables surlignées sont sans dimensions.

Par ailleurs m est la masse, l la longueur dans la direction radiale, et w la largeur et la profondeur (supposées identiques) de l'objet subissant le stress. Posons $Q = 0$, $r = -a/2$, prenons un Trou noir critique $a = GM$ (ce sont les plus favorables à nos voyages temporels) de $10^7 = \text{masses solaires} = 2.10^{37} \text{ kg}$.

Pour un vaisseau spatial prenons $l = 100m$, $m = 100 \text{ tonnes}$, $w = 100m$ avec les facteurs dimensionnels entre crochets rajoutés pour respecter l'équation aux dimensions.

$$\{100.10^5.(0,25-3)/8.10^4.4.10^{-74}\}(1,25)^3 \times [(G^{-2})(c^6)] = + 0,88.10^{-1} \text{ N/m}^2 \quad (12-6-2)$$

Ce qui est un stress négligeable : Remarquons le signe « + » : nous sommes dans l'anti-univers car nous avons posé $r < 0$). Ce n'est donc pas de là que viendront les problèmes. L'autre composante étant du même ordre de grandeur, inutile de le calculer. Il faut retenir que dans le contexte que nous considérons, ces forces de marées restent à un niveau tout à fait raisonnable (hors de l'axe les composantes dépendent de θ), si on ne s'approche pas trop de la singularité, hypothèse que nous respecterons dans nos calculs.

7-Accélération

Le module de la quadri accélération est défini par: $|A^\mu| = (g_{\mu\nu}A^\mu A^\nu)^{1/2} \quad (12-7-1)$

Pour calculer l'accélération physique il faut re-paramétriser la courbe par le temps propre s . Les dérivées doivent être exprimées par rapport au temps propre.

$$\frac{dx^\mu}{ds} = \frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{g_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b}}, \quad \frac{d^2x^\mu}{ds^2} = \frac{\ddot{x}^\mu}{|g_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b|} \quad (12-7-2)$$

Les composantes de la quadri accélération sont définies par: $A^\mu = \frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} \quad (12-7-3)$

Par contre on va voir que dans nos hypothèses, pour orbiter sur des boucles temporelles, on subit une « accélération » très importante, accélération qui non seulement met à mal l'observateur et son environnement, mais à laquelle il va falloir s'opposer pour rester sur l'orbite (moteur de fusée allumé).

Précisons un peu plus la nature de cette accélération

En Relativité générale, on fait souvent référence à différentes accélérations précisons bien celle qui doit être prise en compte.

L'accélération « ressentie » par l'observateur est le « module » de la quadri accélération :

C'est l'accélération dans le référentiel local inertiel attaché à l'observateur, puisque dans ce référentiel, le temps propre se confond avec la coordonnée temps, du fait que l'observateur est « immobile » dans ce référentiel. C'est donc ceci qu'il nous faut calculer :

8- Calcul du module de l'accélération :

Métrique de Kerr Newman en coordonnées de Boyer Lindquist, en signature (+, -, -, -):

$$\left[\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right] dt^2 + \left[\frac{2a \sin^2 \theta (r^2 + a^2 - \Delta)}{\rho^2} \right] dt d\varphi - \frac{\sin^2 \theta [(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta]}{\rho^2} d\varphi^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 \quad (12-8-1)$$

Avec: $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2, \quad \rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta.$

La métrique inverse vaut: $g^{11} \partial_t^2 + g^{13} \partial_t \partial_\varphi + g^{31} \partial_\varphi \partial_t - \frac{\Delta}{\rho^2} \partial_r^2 - \frac{\partial \theta^2}{\rho^2} + g^{33} \partial_\varphi^2 \quad (12-8-2)$

On n'a explicité que les coefficients qui seront utilisés dans le calcul qui suit

Rappelons que nous considérons le cas « simple » où : $t, r, \theta = \text{constante}$, et où seul φ , que nous le paramétrons par le paramètre affine λ avec le signe « - » pour être homogène avec le cas où on peut remonter le temps pour indiquer qu'on tourne en sens contraire de celui du trou noir, varie.

On rappelle que ceci s'écrit:

$$x^\mu [t, \varphi, r, \theta] = [t_0, -\lambda, r_0, \theta_0] \quad (12-8-3)$$

L'existence de ce type de courbe, et la contrainte qu'elle soit de type « temps » n'est possible que pour certaines valeurs des coordonnées, comme les calculs vont le montrer.

Il faut en particulier que $g_{\varphi\varphi} > 0$ pour satisfaire la condition donnée par (12-1-1)

De la définition de la quadri accélération:

$$A^\mu = \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} \quad (12-8-4)$$

et du paramétrage de la trajectoire, en remarquant qu'il implique que le terme en dérivée seconde est nul (les coordonnées de la courbe paramétrée sont constantes ou linéaires), en utilisant les connexions dans ce cas ($Q = 0, \theta = \pi/2$), comme seul x^l , c'est-à-dire φ n'est pas constant, (12-8-4) se réduit à :

$$A^\mu = \Gamma_{l\ l}^\mu \frac{dx^l}{ds} \frac{dx^l}{ds} \quad (12-8-5)$$

Avec la liste des connexions non nulles⁶², on voit que les seules connexions à prendre en compte sont donc: $\Gamma_{l\ l}^\mu$, soit $\Gamma_{\varphi\ \varphi}^r$ et $\Gamma_{\varphi\ \varphi}^\theta$.

D'après (12-8-5), ceci indique que les seules composantes non nulles de A^μ sont A^θ et A^r . Calculons:

$$\Gamma_{\varphi\ \varphi}^r = 1/2 g^{r\lambda} (\partial_\varphi g_{\varphi\lambda} + \partial_\varphi g_{\varphi\lambda} - \partial_\lambda g_{\varphi\varphi}) \quad (12-8-6)$$

Les dérivées de la métrique par rapport à φ , sont nulles (elle ne dépend pas de φ), il n'y a pas de termes croisés en r , la formule devient:

$$\Gamma_{\varphi\ \varphi}^r = - 1/2 g^{rr} \partial_r g_{\varphi\varphi} \quad (12-8-7)$$

Calculons aussi :

$$\Gamma_{\varphi\ \varphi}^\theta = 1/2 g^{\theta\lambda} (\partial_\varphi g_{\varphi\lambda} + \partial_\varphi g_{\varphi\lambda} - \partial_\lambda g_{\varphi\varphi}) \quad (12-8-8)$$

Les dérivées de la métrique par rapport à φ sont nulles, (elle ne dépend pas de φ) et comme il n'y a pas de termes croisés en θ dans la métrique inverse, la formule devient :

$$\Gamma_{\varphi\ \varphi}^\theta = - 1/2 g^{\theta\theta} \partial_\theta g_{\varphi\varphi} = 0 \quad (12-8-9)$$

Dans $g_{\varphi\varphi}$, tous les termes en θ sont soit en $\sin^2\theta$ soit en $\cos^2\theta$.

Leur dérivée fait donc intervenir des produits $\sin\theta \cos\theta$ qui sont nuls pour $\theta = \pi/2$.

Ces coordonnées sont constantes ou linéaires, la dérivée seconde dans (12-8-4) est nulle.

L'accélération s'évalue par rapport au temps propre:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx^l}{d\lambda} \frac{d\lambda}{ds}, \quad \frac{dx^l}{d\lambda} = -1 \text{ soit } \left(\frac{dx^l}{d\lambda}\right)^2 = 1, \quad ^{63}$$

Les autres $\frac{dx^\mu}{d\lambda}$ sont nuls, et:

$$\frac{ds^2}{d\lambda^2} = g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu \quad (12-8-10)$$

L'équation (12-8-4) s'écrit :

$$A^\mu \cdot g_{\mu\nu} x'^\nu x'^\nu = [0, 0, \Gamma_{\varphi\ \varphi}^r, \Gamma_{\varphi\ \varphi}^\theta] \quad (12-8-11)$$

⁶² Elles sont tirées de [37] annexe C, mais je les ai également calculées et vérifiées par « mathematica »

⁶³ Il semble que le signe de variation de φ n'ait pas d'importance, à ce niveau. En fait si on avait pris $\varphi = +\lambda$ au lieu de $\varphi = -\lambda$, on aurait obtenu le même résultat car, comme nous l'avons vu, la boucle temporelle n'est pas orientée.

qui compte tenu de (12-8-7) et (12-8-9) devient: $A^\mu \cdot g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = [0, 0, -\frac{1}{2} g^{rr} \partial_r g_{\phi\phi}, 0]$ (12-8-12)

La quadri accélération est définie par: $|A^\mu| = (g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu)^{1/2} = |A^r| = (g_{rr} A^r A^r)^{1/2}$ (12-8-13)

du fait que seule la composante A^r n'est pas nulle, dans notre cas, on tire :

$$|A^\mu| = | [g_{rr} \{ (g_{\phi\phi} x'^\phi x'^\phi)^{-1} (-\frac{1}{2} g^{rr} \partial_r g_{\phi\phi}) \}^2]^{1/2} | \quad (12-8-14)$$

(Rappel pour $g_{\phi\phi}$, voir la métrique, On voit que dans nos hypothèses, la quadri accélération n'a qu'une composante, (on rappelle que pour $\theta = \pi/2$, $\partial_\theta g_{\phi\phi} = 0$). L'équation (12-8-13) devient:

$$|A^\mu| = | -\frac{1}{2} (g_{\phi\phi} x'^\phi x'^\phi)^{-1} (g^{rr}) (\partial_r g_{\phi\phi}) (g_{rr})^{1/2} | \quad (12-8-15)$$

Remarquons que comme on calcule une « valeur absolue », le signe « - » doit disparaître, ce qui est confirmé par l'élévation au carré et de l'extraction de racine carrée. On obtient une valeur absolue. Reste à déterminer le signe. J'ai supposé qu'on pouvait conserver le signe.

Mais il est prudent pour connaître le « sens » de l'accélération, d'utiliser d'autres critères, pour valider l'argument.

Comme : $g^{rr} g_{rr} = \delta_r^r = 1$ (12-8-16)

On obtient finalement : $|A^\mu| = | \frac{-(g^{rr})^{1/2} \partial_r g_{\phi\phi}}{2g_{\phi\phi} x'^\phi x'^\phi} |$ (12-8-17)

Avec: $g^{rr} = \frac{-1}{\rho^2}$ (12-8-18)

De (12-8-17) on voit que dans ce contexte de boucle temporelle, l'accélération présente une singularité sur la surface du tore délimitant la machine temporelle puisque lorsque $g_{\phi\phi} = 0$, $|A^\mu|$ devient infini.

Nous avons déjà noté au chapitre 9-1-8 que la surface délimitant cette zone était singulière. Nous retrouvons ce phénomène ici dans le contexte particulier des boucles temporelles.

Calculons $|A^\mu|$. Rappelons que dans les calculs qui suivent $\theta = \pi/2$, donc $\sin\theta = 1$ et $\cos\theta = 0$ donc $\rho^2 = r^2$.

$$(\partial_r g_{\phi\phi}) = \partial_r \left[\frac{(r^2 - 2Mr + a^2)a^2 - (r^2 + a^2)^2}{r^2} \right] = \partial_r \left[a^2 - \frac{2Ma^2}{r} + \frac{a^4}{r^2} - r^2 - \frac{a^4}{r^2} - 2a^2 \right] = \partial_r \left[-a^2 - \frac{2Ma^2}{r} - r^2 \right] = \frac{2Ma^2}{r^2} - 2r$$

$$[g^{rr}]^{1/2} (\partial_r g_{\phi\phi}) = \frac{(-1)^{1/2}}{(\rho^2)^{1/2}} \frac{(2Ma^2 - 2r)}{r^2} = \frac{(-r^2 + 2Mr - a^2)^{1/2}}{r} \frac{(2Ma^2 - 2r)}{r^2} \quad (12-8-19)$$

Avec: $x'^\mu [t, \phi, r, \theta] = [0, -1, 0, 0]$, on a $g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = g_{\phi\phi} \cdot (-1)(-1) = g_{\phi\phi}$

$$g_{\phi\phi} = \left[\frac{1 \cdot a^2 - (r^2 + a^2)^2}{r^2} \right] = \left[\frac{(r^2 - 2Mr + a^2) \cdot a^2 - (r^2 + a^2)^2}{r^2} \right] = - \left(a^2 + \frac{2Ma^2}{r} + r^2 \right)$$

Au passage, on voit que pour que $g_{\phi\phi} > 0$, condition pour que la trajectoire soit de type temps, il faut que $r < 0$ et de valeur absolue petite pour que le terme en $1/r$ soit prépondérant.

$$|A^\mu| = \frac{-(-1 + 2M/r - a^2/r^2)^{1/2} (2Ma^2/r^2 - 2r)}{-2(a^2 + 2Ma^2/r + r^2)} = \frac{-(-1 + 2M/r - a^2/r^2)^{1/2} (2Ma^2 - 2r^3)}{-2(a^2 r^2 + 2Ma^2 r + r^4)} \quad \text{soit:}$$

$$|A^\mu| = \frac{-(1 - 2M/r + a^2/r^2)^{1/2} (Ma^2 - r^3)}{(a^2 r^2 + 2Ma^2 r + r^4)} \quad (12-8-20)$$

Remarquons que dans ce système d'unités « naturelles » que nous avons adopté où a , M , r ont « la même dimension » (on exprime r et a en fonction de M et n'oublions pas qu'en Relativité Générale, à une masse on peut naturellement associer une longueur, le « rayon de Schwarzschild », $|A^\mu|$ varie en $1/M$, ce qui signifie que l'accélération auquel on est soumis est inversement proportionnelle à la masse du trou noir, ce qui n'est pas surprenant et est bien cohérent avec les résultats connus sur les trous noirs.

Par ailleurs, nous avons déjà remarqué, que ce résultat était insensible au sens de rotation, comme la métrique le suggérait, puisque pour $r \ll a$ et $\theta = \pi/2$, la métrique peut s'écrire au premier ordre :

$$ds^2 \approx a^2(1+2GM/r)d\varphi^2$$

Expression qui est indifférente au signe de $d\varphi$. On verra que ce ne sera pas le cas si on veut décrire des trajectoires qui remontent le cours du temps (comme dt n'est pas nul, le produit croisé n'est pas nul), il faudra dans ce cas décrire des trajectoires en «contre rotation ».

9- Application numérique

On a utilisé le système d'unités naturelles $c = G = 1$ pour l'application numérique, il faut retourner au système MKS.

L'accélération $|A^\mu|$ se mesure en m/sec^2 soit $[L]/[T]^2$.

Le moment angulaire spécifique du trou noir « a » vaut $a = J/Mc$ avec J moment angulaire donné par l'intégrale de Komar, du trou noir.

Avec cette définition, a a la dimension d'une longueur.

La masse M du trou noir est prise égale à 10^7 masses solaires.

A) Calcul pour $a = M/2$ et $r = -M/2$

$$A) |A^\mu| = |A^r| = - \frac{-(1 - 2M/r + a^2/r^2)^{1/2} (Ma^2 - r^3)}{(a^2r^2 + 2Ma^2r + r^4)} = - \frac{(1+4+1)^{1/2} M^3(1/4 + 1/8)}{M^4(1/16 - 2/8 + 1/16)}$$

$$|A^\mu| = |A^r| = \frac{-(6)^{1/2} M^3(3/8)}{M^4(-1/8)} = + \frac{3 \cdot (6)^{1/2}}{M}$$

Ce cas est compatible avec le fait qu'on est dans la zone critique, car :

$$g_{\varphi\varphi} = -(a^2 + 2Ma^2/r + r^2) = -(1/4 - 1 + 1/4)M^2 = + 1/2 M^2 \text{ est positif}$$

On obtient le résultat de l'accélération en dimension $|A^\mu| = [M]^{-1}$

Pour avoir une accélération exprimé en m/sec^2 soit $[L]/[T]^2$

Il faut multiplier par $G^{-1} \cdot c^4$, en effet :

$$[G]^{-1} = [L]^{-3} [M]^{+1} [T]^{+2} \text{ et } c = [L]/[T] \text{ soit } c^4 = [L]^4 [T]^{-4} \\ |A^\mu| = [M]^{-1} [G^{-1}] [c^4] = [M]^{-1} [L]^{-3} [M]^{+1} [T]^{+2} [L]^4 [T]^{-4} = [L]/[T]^2$$

Appliquons avec $M_{\text{soleil}} = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m}$, $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2$ et $M = 10^7 M_{\text{soleil}}$.

L'équation aux dimensions appliquée à (33) donne :

$$|A^\mu| = |A^r| = (3 \cdot 6^{1/2}/M) \cdot c^4/G = + 4.46 \cdot 10^7 \text{ m/sec}^2 \quad (12-9-1)$$

La seule composante de $|A^\mu|$ étant $|A^r|$ le signe « + » indique qu'elle est dirigée vers les « r » croissants donc r étant négatif, on est attiré par la singularité. C'est la rotation qui est à la source de cette attraction à courte portée (loi en $GMa^2(r^2+a^2)^{-2}$), voir chapitre 6.

B) Calcul pour $a=M$ (trou noir critique) et $r = -M/2$ ⁶⁴

$$g_{\varphi\varphi} = -(a^2 + 2Ma^2/r + r^2) = -(1 - 4 + 1/4) = +11/4 M^2 \text{ est positif}$$

$$|A^\mu| = |A^r| = \frac{-(1 - 2M/r + a^2/r^2)^{1/2}(Ma^2 - r^3)}{(a^2 r^2 + 2Ma^2 r + r^4)} = \frac{-(1+4+4)^{1/2} M^3 (1 + 1/8)}{M^4 (1/4 - 1 + 1/16)} = \frac{-3 M^3 (18/16)}{M^4 (-11/16)} = \frac{+54}{11M}$$

L'équation aux dimensions appliquée à (16) donne :

$$|A^\mu| = |A^r| = (54/11)M.c^4/G = +2.98.10^7 \text{ m/sec}^2 \quad (12-9-2)$$

La seule composante de $|A^\mu|$ étant $|A^r|$ le signe « + » indique qu'elle est dirigée vers les « r » croissants donc r étant négatif, on est attiré par la singularité, comme au cas précédent.

10- Temps propre par révolution sur une boucle temporelle

Pendant qu'on y est on peut aussi calculer le temps propre mis pour effectuer une révolution.

De
$$ds = d\lambda \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}.$$
 (12-10-1)

Comme on peut écrire $d\lambda = d\varphi/(d\varphi/d\lambda) = d\varphi/\varphi'$, et que $\varphi' = -1$, on tire:

$$\Delta s = \int_0^{-2\pi} \sqrt{g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b} \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}} = 2\pi \sqrt{g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b} \quad (12-10-2)$$

$$\Delta s = 2\pi (g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu)^{1/2} = 2\pi (g_{\varphi\varphi} (-1)(-1))^{1/2} = 2\pi (g_{\varphi\varphi})^{1/2} = 2\pi (-a^2 - 2Ma^2/r - r^2)^{1/2} \quad (12-10-3)$$

La dernière équation utilise la valeur de $g_{\varphi\varphi}$ calculée précédemment. En termes de dimensions (12-10-3) donne : $[T] = [M]$.

L'équation aux dimensions conduit à multiplier par :

$$(G).(c^{-3}) \text{ soit } ([M]^{-1}[L]^3[T]^{-2})/([L]^{-3}[T]^3)$$

$$\text{Vérifions: } [T] = [M] (G).(c^{-3}) = [M] ([M]^{-1}[L]^3[T]^{-2})/([L]^{-3}[T]^3) = [T]$$

Comme $ds = c.d\tau$, en appliquant tout cela, on trouve respectivement pour les applications numériques pour un TN de 10^7 masses solaires :

$$\text{A) Pour } r = M/2, a = M/2 \text{ on a } t_A = 2\pi M [- (1/4 - 1 + 1/4)]^{1/2} = 2\pi (1/2)^{1/2} . M \text{ soit:}$$

$$t_A = 2\pi (1/2)^{1/2} GM.c^{-3}, \text{ avec } M = 10^7 \text{ masses solaires : } t_A = 220 \text{ secondes.}$$

$$\text{B) En suivant le même calcul pour } a = M \text{ et } r = M/2 \text{ on obtient: } t_B = 515 \text{ secondes}$$

11-Energie consommée par révolution

Calculons le produit de l'accélération par le temps, c'est-à-dire, le temps pendant lequel on va produire l'accélération, quantité qui va définir la quantité de carburant à éjecter par révolution.

$$\text{A) } 220. 4,46. 10^7 = 9.81.10^9$$

$$\text{B) } 515. 2.98.10^7 = 1,5.10^{10} \quad (12-11-1)$$

⁶⁴ Se situe dans la machine temporelle.

11-1 Solution extrême

Soyons moderne, supposons qu'on ait un dispositif fonctionnant par réaction, capable d'éjecter le gaz à la vitesse « c » (difficile de faire mieux).

Remarquons que dans ce cas, l'utilisation de l'équation de Tsiolkovsky (non relativiste), est certainement sujette à caution, encore que si on éjecte du rayonnement pur (lumière) la loi sur les impulsions devrait s'appliquer, mais je n'ai pas creusé ce point et pour ce qu'on veut montrer, cela devrait être un indicateur, à défaut d'autre chose ... Si on veut qu'au bout d'une révolution il reste 100 Tonnes (poids de l'ISS), à partir de l'équation de Tsiolkovsky avec $v_e = c$, on a pour B) :

$$10^5 = m_0 \exp(-1,5 \cdot 10^{10} / 3 \cdot 10^8) = m_0 \exp(-50), \quad \rightarrow \quad m_0 = 0,5 \cdot 10^{27} \text{ kg}^{65} \quad (12-11-1-1)$$

Si on considère le moteur capable de faire cela, il va faire appel à la désintégration totale de matière en énergie ($e = mc^2$) cela fait $4,5 \times 10^{43}$ joules, environ 10^{41} Watts pendant la révolution. A titre de comparaison, le soleil c'est $3,9 \cdot 10^{26} \text{ W}$, et une supernova de l'ordre de 10^{51} joules (en rayonnement, plus si on compte les neutrinos).

Ces chiffres interpellent doublement : Ils sont énormes, mais il sont finis.

On sait que l'énergie est la grandeur associée au temps en Relativité, et on voit que pour gagner du temps il faut dépenser de l'énergie. La question qui se pose est : L'énergie nécessaire à une particule pour parcourir une boucle temporelle n'est elle pas égale à son énergie propre. Ce qui permettrait d'ailleurs d'ouvrir une voie d'analyse en utilisant cette équivalence.

Les calculs (qui s'appuient sur une méthode approximative) donnent une valeur qui en est très proche (à 10^{-22}), reste à savoir si des calculs rigoureux donneraient exactement la bonne valeur.

11-2 Solution réaliste

Maintenant si on considère une vitesse réaliste d'éjection des gaz (3 km/s) on voit que l'équation de Tsiolkovsky donne alors une masse de l'engin au départ de la révolution:

$$10^5 = m_0 \exp(-1,5 \cdot 10^{10} / 3 \cdot 10^3) = m_0 \exp(-0,5 \cdot 10^7) \text{ soit } m_0 = 10^5 \exp(5 \cdot 10^6)$$

Pour évaluer cela, passons en Logarithmes décimaux.

$$\text{Log}(m_0) = 5 + \text{Log } e \cdot 5 \cdot 10^6 \approx 2171275 \text{ (Log } e \approx 0,434250) \rightarrow m_0 = 10^{2171275} \text{ kg} \quad (12-11-1-2)$$

L'univers peut être estimé à 10 milliards de galaxies de chacune 10 milliards de masses solaires soit environ 10^{50} kg , négligeable par rapport à m_0 , quant au trou noir on n'en parle même pas. Le moins qu'on puisse dire, c'est qu'il y a un **problème**. Nous y reviendrons.⁶⁶

⁶⁵ Si au lieu de la station on considère un électron de masse 10^{-30} kg , il faudrait au départ une masse de $0,5 \cdot 10^{-8} \text{ kg}$ (**environ la masse de Planck!**). Mais dans le cas « réaliste », même pour un électron on arriverait à une masse de départ astronomique! Un électron qui remonte le cours du temps est vu comme un positron, mais comme ce point de vue est celui d'un observateur à l'infini positif qui ne voit rien du fait de l'horizon interne c'est sans objet!

⁶⁶ Nous n'avons pas traité le cas des trajectoires permettant de remonter le temps, voir l'annexe 14 « remonter le temps » pour un exposé succinct et [37] p. 52-92

13 -Est ce bien raisonnable d'étudier des boucles temporelles ?

1- Etude phénoménologique: caractérisation des boucles.

Bien entendu le voyage dans le temps entraîne des paradoxes qui font les délices des auteurs de science fiction. Mais ceci ne peut pas être un argument pour invalider notre analyse et il ne peut servir que d'indicateur pour motiver une investigation de cette situation qui est pour le moins non triviale.

Quelques remarques préliminaires

Pour commencer précisons l'objet de nos commentaires.

Rappelons que dans le cas d'un trou noir de Kerr (ou Kerr Newman) qui n'est pas surcritique (avec horizons des événements), les extensions analytiques maximales décrivent une structure infinie de motifs, chacun formé de plusieurs pavés (régions de type I, II, III) délimités par des horizons.

Ce qui suit, sauf mention contraire explicite, est relatif à un de ces motifs de ce type de trous noirs.

L'extension maximale « filamentaire » est considérée comme non physique⁶⁷, en tout cas pour des trous noirs astrophysiques.

On est amené à partitionner de la zone de Type III

La zone associée au pavé « sous l'horizon interne des événements » est qualifiée d'espace « vicieux » car la causalité peut y être violée, mais elle ne l'est pas forcément, car il existe des lignes d'univers parfaitement causales dans cette région.

Cela conduit à définir des sous partitions de cette partition espace « vicieux » en plusieurs sous ensembles distincts qu'on peut caractériser par leurs propriétés différentes.

Rappelons que la « machine temporelle » est délimitée par une hypersurface de topologie torique, totalement incluse dans la zone sous l'horizon interne, confinée dans l'anti espace ($r < 0$) pour un trou noir de Kerr mais qui déborde dans l'espace positif pour un trou noir de Kerr Newman.

Tentons de partitionner la région, en sous régions, en première approche, on peut distinguer :

1- L'extérieur de la machine temporelle⁶⁸, où toute ligne d'univers qui y est confinée ne viole pas la causalité

2-L'intérieur de la machine temporelle qui peut lui-même être divisée en deux classes.

2-1 Les lignes d'univers qui sont confinées dans la machine temporelle et qui violent la causalité

2-2 Les lignes d'univers qui sont confinées dans la machine temporelle et qui ne violent pas la causalité.

3- Des lignes d'univers qui s'étendent à l'extérieur et à l'intérieur de la machine temporelle qui se divisent en deux classes :

3-1 Celles qui violent la causalité

3-2 Celles qui ne violent pas la causalité.

On voit que le critère par région habituellement utilisé (ensemble de points délimité par des hypersurfaces) est incomplet pour une description du phénomène.

On est donc amené à utiliser un critère de classement plus compliqué, mais sans doute plus structurel,

⁶⁷ Voir [46] p.882.

⁶⁸ Pour la surface elle-même comme elle présente une singularité, il est prudent de la classer à part.

qui fait intervenir des lignes d'univers orientées et pas seulement des points de la variété⁶⁹.

Ce critère implique une description différente de la variété par des courbes orientées, (à la manière des « congruences de géodésiques », sauf que ces courbes ne sont pas nécessairement des géodésiques).

On peut facilement vérifier que les congruences de géodésiques nulles principales, qui génèrent toute la variété (en fait tous les points de la variété, mais cette description se révèle insuffisante) donc qui pénètrent, entre autres, dans la machine temporelle, ne génèrent pas de boucles. On a aussi montré qu'aucune boucle simple n'est géodésique.⁷⁰

2- Remarque sur la topologie torique de la machine temporelle

Nous avons largement insisté sur les symétries de la solution. Rappelons que à l'instar de la phénoménologie des trous noirs statiques de Schwarzschild, dans la solution complète ($m^2 > a^2 + Q^2$), il y a des horizons pour $r > 0$ et il n'y en a pas pour $r < 0$.

Simplement, dans la solution de Kerr l'univers et « l'anti-univers » (symétrique du trou noir qu'on appelait le trou blanc) univers et anti-univers sont connectés par des lignes d'univers (en particulier des géodésiques) de type temps ou nul alors qu'il n'y avait que des trous de vers avec une connexion via des lignes d'univers de type espace dans la solution de Schwarzschild.

Le chapitre 6 nous fournit une explication phénoménologique, la masse est répulsive pour $r < 0$.

La topologie non triviale « torique » et de type temps de l'hypersurface associée à la machine temporelle ressemble aux ergosurfaces qui sont également de type temps mais de topologie sphérique.

A noter que l'ergosphère contenue entre cette ergosurface et l'horizon à une topologie quasi torique, elle se réduit à un point aux pôles. Sous cet angle, la symétrie se rétablit, même si dans un cas le changement de sens de rotation se fait de façon continue et discontinue dans l'autre!

Tout ceci étant décrit dans le même référentiel global il convient, comme d'habitude, d'interpréter physiquement avec discernement ces valeurs. On sait que des vitesses $> c$ dans un référentiel global en RG ne violent pas nécessairement les lois de la RG (ce qui compte c'est que la vitesse d'une particule matérielle soit $< c$ dans son référentiel local).

Bien qu'il n'y ait pas d'horizons dans l'anti univers, (il est répulsif) il y a quand même des anti-hypersurfaces remarquables qui correspondent à des phénoménologies physiques symétrique par rapport au temps. A l'horizon par exemple correspond un anti-horizon où rien ne peut entre.

Les boucles sur la coordonnée t , relèvent d'un critère topologique.

Il est non trivial qu'en suivant une ligne d'univers de type temps (le temps propre croît), on puisse repasser périodiquement au même point de la variété (t, r, θ, φ) . Comme dans notre cas elle ne résulte pas d'une identification hasardeuse, une telle boucle de type temps est un invariant topologique. L'existence de telles boucles n'est pas trivial, mais l'entraînement de l'espace en rotation devrait nous permettre de comprendre comment ces boucles peuvent exister, dans le contexte de nos hypothèses.

Ceci étant posé, examinons un certain nombre de considérations que l'on peut faire à priori dans ce type d'espace temps, (et qu'on rencontre pour certaines dans la littérature) nous enchaînerons par une proposition propre à résoudre ces paradoxes.

Commençons par examiner plus en détail l'effet de la rotation que nous avons cité au chapitre 9-1-8 sur les lignes d'univers de type temps et lumière.

3- L'entraînement de référentiel. Rappel de l'étude faite en 9-1-8

Revenons et approfondissons les résultats que nous avons énoncés au § 9-1_8.

⁶⁹ Cet argument sera repris et développé lors de l'analyse de « paradoxes temporels » dans cette région. En plus de leur définition dans les coordonnées, ces courbes doivent ajouter un paramètre affine (temps propre) dans un espace local.

⁷⁰ Reste à montrer qu'aucune courbe géodésique nulle ou de type temps ne viole la causalité, ce qui doit être vrai.

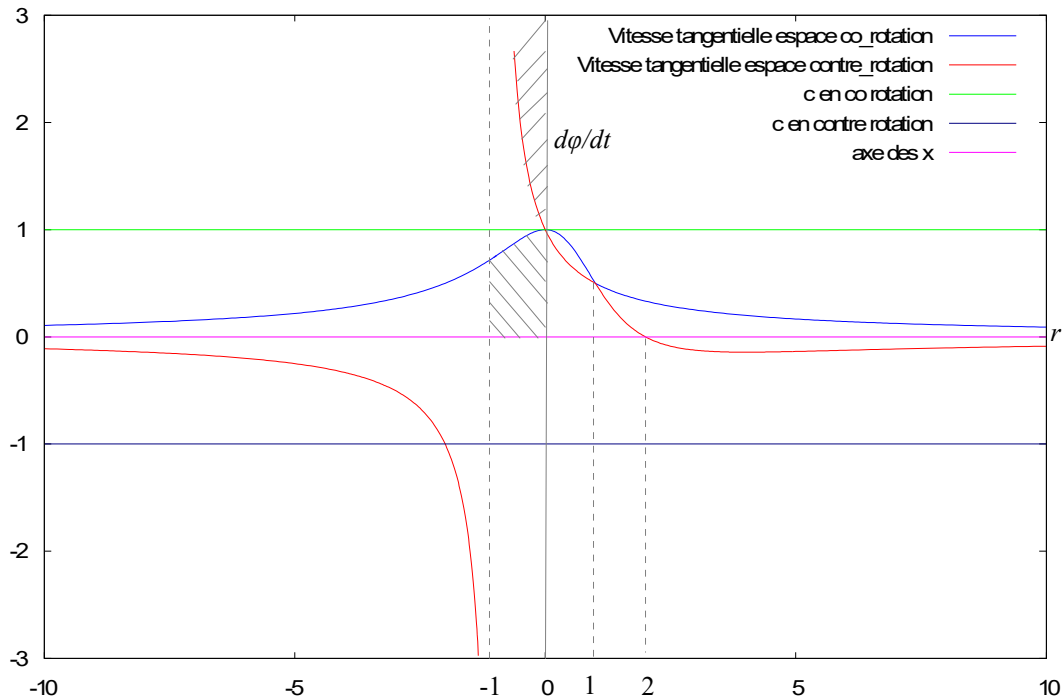


Fig. 1⁷¹: Vitesse angulaire des photons, en co et contre rotation: exemple d'un TN critique $G, c, a, M=1$. Les zones de type temps dans la machine temporelle $-1 < r < 0$ sont hachurées.

Partition dans la machine temporelle.

Ces remarques et le diagramme de la figure ci dessus, où la machine temporelle est située entre les droites verticales $[-1, 0]$, nous amènent à préciser le découpage (que nous avons évoqué) de cette zone, en plusieurs partitions, selon, selon les catégories suivantes:

1 - La sous région comprise entre les courbes bleues et rouge, où $ds^2 < 0$ qui est de type espace, et sur laquelle nous ne dirons rien puisque nous ne considérons que les lignes d'univers de type temps.

2-1 : La sous région au dessus de la courbe rouge ⁷² de type temps ($ds^2 > 0$)!

Dans cette sous région $d\phi/dt > 0$ ce qui se décompose en 2 cas possibles:

2-1-1: $d\phi > 0, dt > 0$, ce cas, à supposer qu'il existe⁷³, ne nous intéresse pas.

2-1-2: $d\phi < 0, dt < 0$, (zone hachurée supérieure) ce cas correspond à un voyage dans le temps, même s'il semble paradoxal qu'une particule (et à la limite un photon) ait une vitesse angulaire supérieure à celle d'un photon en co-rotation .

⁷¹ Les figures 1 à 4 ont été tracées en utilisant le logiciel maxima.

⁷² On utilise la signature (+, -, -, -). Les courbes des figures 1 à 4 correspondent à $ds^2 = 0$, $d\phi/dt$ sont les racines d'une équation du second degré. On sait que le signe du polynôme ds^2 change entre les racines (simples) représentées par ces courbes. Il suffit d'évaluer le signe du polynôme dans chaque région définie par r pour les sous régions définies par $d\phi/dt$ pour $d\phi/dt = \infty$, par exemple pour le connaître dans toutes les autres sous régions.

⁷³ Ce cas n'existe pas car cela voudrait dire qu'une particule matérielle en co-rotation a une vitesse angulaire supérieure à la lumière en co-rotation.

Mais n'oublions pas que nous comparons des rapports dont les deux membres sont positifs dans un cas et négatifs dans l'autre, ce qui correspond à des phénoménologies différentes.

Par contre la vitesse angulaire positive de la particule en contre-rotation est bien supérieure à celle du photon en contre-rotation ce qui s'explique physiquement par le fait que le photon est moins entraîné par la rotation positive de l'espace que la particule massive.

-2-2 : La sous région sous la courbe bleue également de type temps .

- 2-2-1 : Partie où $d\varphi/dt > 0$, avec les deux cas précédents :

2-2-1-1 : $d\varphi > 0, dt > 0$, cas qui existe⁷⁴, mais qui ne nous intéresse pas.

2-2-1-2 : $d\varphi < 0, dt < 0$, ce dernier cas) correspondrait à un voyage dans le temps. Ici la particule matérielle en contre rotation a une vitesse angulaire positive de rotation inférieure à celle d'un photon en contre rotation, ce qui est impossible (la particule matérielle est plus entraînée par la rotation que le photon).

-
- 2-2-2 : Partie où $d\varphi/dt < 0$
-

1. : $d\varphi > 0, dt < 0$, Ce cas est impossible pour une particule matérielle.
2. : $d\varphi < 0, dt > 0$, Ce cas n'est pas critique.

En résumé, seule la zone 2-1-2 correspond aux supposées violations de causalité que nous considérons et permet un voyage dans le temps.

Remarquons que cette « vitesse » des particules matérielles peut sembler être infinie dans le cas des boucles ($d\varphi \neq 0$, et $dt = 0$), mais que comme cette notion de vitesse n'est pas physique cela n'a rien d'interdit alors que pour un photon sur la même boucle temporelle simple à $\theta = \pi/2$, $r = \text{constante}$) l'équation (11-2-1) nous donne $d\varphi = 0$, soit $d\varphi/dt = 0/0$ (compatible avec l'équation.(4-2-3-10)).

On ne rencontre donc aucune contradiction apparente lorsqu'on essaie d'expliquer le phénoménologie de la machine temporelle et des boucles en tenant compte de l'entraînement de référentiel.

Rappelons que la représentation la plus réaliste pour la description et la comparaison de phénoménologies locales est comme toujours celle donnée par les bases locales définie par une tétrade (qui dépend des coordonnées et c'est là qu'on retrouve leur caractère essentiel).

Précisons ce que nous entendons par co-rotation et contre-rotation.

L'équation du second degré (4-2-3-9) dérivée directement de l'équation du ds^2 pour la lumière, décrit des trajectoires de photons dans le plan équatorial à coordonnée r constante.

Nous l'avons introduit au chapitre 4, et nous avons associé ces trajectoires de photons à la rotation de l'espace. Elle possède deux racines (réelles dans notre cas).

La ligne d'univers, dans le plan équatorial à coordonnée $r = \text{constante}$, est un « cercle » qu'on peut paramétrer, comme c'est l'usage, par le paramètre affine λ .

On peut orienter ce paramétrage λ , la rotation du trou noir créant une dissymétrie entre les deux sens.

⁷⁴ Ici une particule matérielle en co-rotation a une vitesse angulaire inférieure à la lumière.

Voir par exemple équation (12-1-2) pour le paramétrage sur une boucle.

Nous parlerons de co-rotation pour désigner la solution qui correspond à la trajectoire du photon orientée localement dans le même sens de rotation que celle du trou noir et de contre rotation dans le cas contraire.

Pour la région correspondant à $r \gg 1$, on attribue naturellement la solution positive à la co-rotation (celle où la racine carrée est précédée du signe +) et la solution négative à la contre rotation.

Par raison de continuité, on garde ensuite cette convention pour toutes les autres régions, mais on voit qu'il existe des régions où la co-rotation et la contre rotation peuvent être toutes les deux positives (à partir de l'ergosphère externe jusqu'à la limite de la machine temporelle: Soit $-1 < r < 2$ dans l'exemple).

Il faut également noter que la solution en co-rotation qui peut s'écrire formellement :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2 + |r| \sqrt{\frac{4 + (r-2)(r+1)(r^2-r+2)}{r^2}}}{(r+1)(r^2-r+2)}$$

où on peut remplacer $|r|$ par r quand $r > 0$, devient $-r$ lorsque $r < 0$, du fait que c'est $|r|$ qui est devant le radical. Ceci inverse le signe du radical, en effet pour $r < 0$, ceci est formellement équivalent à:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2 - r \sqrt{\frac{4 + (r-2)(r+1)(r^2-r+2)}{r^2}}}{(r+1)(r^2-r+2)}$$

Ce qui correspond à la contre rotation pour $r > 0$. Et vice versa pour la solution en contre rotation qui pour $r < 0$. Ceci explique pourquoi quand $-1 < r < 0$, la courbe en « contre rotation » des photons au sens que nous avons défini (par rapport à la situation à l'infini) est au dessus de la courbe en co-rotation. La valeur absolue du numérateur est supérieure et numérateur et dénominateur sont tous deux positifs dans cet intervalle.

Notons également que dans l'exemple cité il n'y a pas de région de type II (IKN, Internal Kerr Newman), le trou noir étant critique, nous avons un horizon double.

On passe directement de la région de Type I à la région de type III.

A priori cette simplification ne semble pas gênante pour le phénomène que l'on veut décrire puisqu'on s'intéresse à un comportement en région III.

A titre de justification, voir ci-dessous la figure 2 équivalente de la figure 1 mais pour $a = 1/2$ (au lieu de $a = 1$), ce qui fait que maintenant nous avons deux horizons (r^+ et r^-).

On remarque que les coordonnées des hypersurfaces remarquables changent mais pour la machine temporelle et l'anti-univers la phénoménologie est inchangée.

Soulignons simplement que la partie entre les deux horizons correspond à une valeur négative de l'expression dont on extrait la racine carrée et que cette partie de la courbe est sujette à caution, mais

comme cela ne concerne pas la machine temporelle nous ne nous attarderons pas sur ce point qui est lié à la façon dont « maxima » traite le problème.

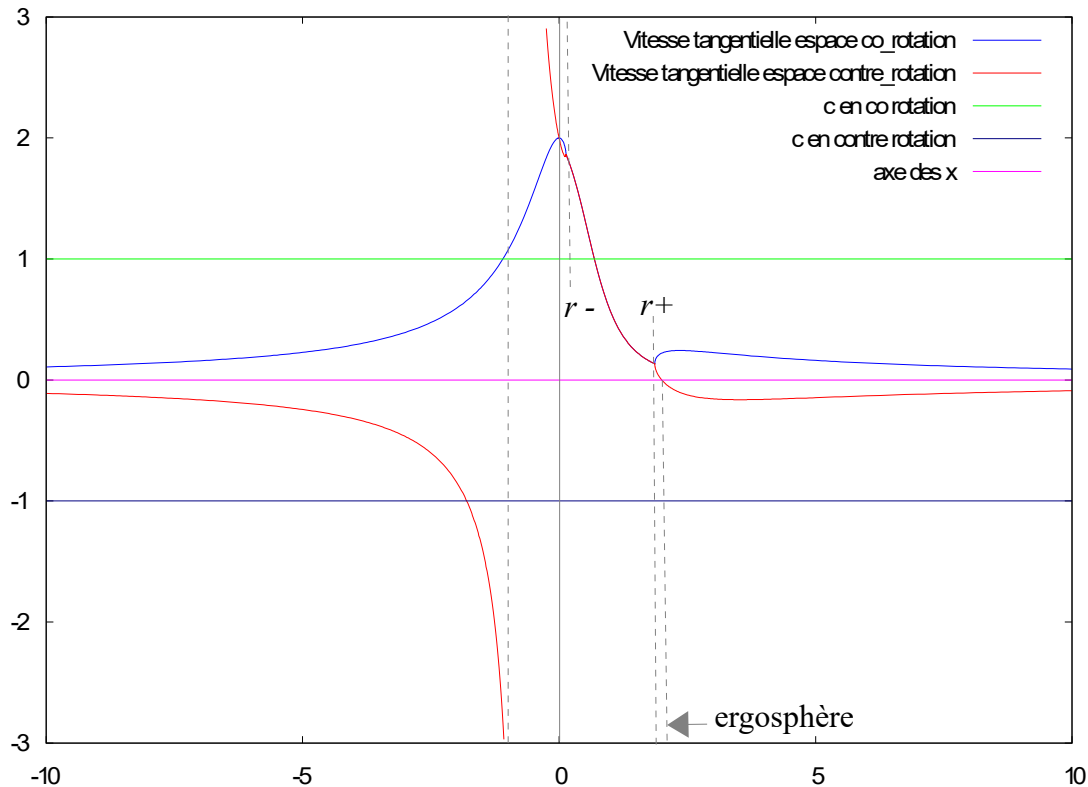


Figure 2 : Vitesse angulaire d'un TN avec $G, c = I, a = M/2 = I/2$

Analyse du diagramme de vitesse angulaire de l'espace : Généralités

Dans la région qui contient l'infini positif, incluant l'ergosphère, et qui est limitée à l'horizon double, le comportement est bien connu. La zone de type temps ($ds^2 > 0$) est repérée sur la figure 1 ; on voit qu'elle se situe entre les courbes bleues et rouges représentant les vitesses angulaires de l'espace.

On voit qu'entre cet horizon et la singularité ($r = 0$ correspond à la singularité dans le plan équatorial), l'espace en co-rotation a toujours une vitesse angulaire supérieure à l'espace en contre rotation.

Dans la zone entre la singularité et l'hypersurface où $g_{\phi\phi} = 0$, on a un comportement paradoxal que nous discuterons plus loin.

A l'extérieur de l'hypersurface $g_{\phi\phi} = 0$, pour $r < 0$, le comportement redevient plus régulier.

Analyse de la vitesse angulaire de l'espace dans l'anti univers ($r < 0$)

En co-rotation, l'espace temps tourne toujours dans le même sens positif avec $0 < d\phi/dt \leq 1$, $d\phi/dt \rightarrow +0$ lorsque $r \rightarrow \pm \infty$ et atteint son maximum 1 pour $r = 0$. La courbe est continue mais du fait de la structure de l'équation la définissant, sa dérivée ne l'est pas en $r = I$.

En contre rotation, $d\phi/dt \rightarrow -0$ lorsque $r \rightarrow \pm \infty$. Sa variation en fonction de r est plus complexe que dans le cas en co-rotation. Notons que le changement de sens de rotation (en contre rotation) se fait de façon continue sur l'ergosurface, alors qu'il se fait de façon discontinue dans la machine temporelle après laquelle elle commence à remonter progressivement vers son asymptote (0 -) lorsque $r \rightarrow -\infty$.

En effet cette vitesse angulaire tend (dans l'exemple de la fig.1) vers l'infini pour $r \rightarrow -I$ sur la surface du tore où brutalement la situation va s'inverser, la vitesse angulaire de rotation sautant de la valeur asymptotique $+\infty$ vers $-\infty$.

Soulignons également l'ampleur de l'effet de rotation qui est limité dans un cas et est infini dans l'autre.

Notons que dans le cas d'une boucle temporelle (à r, θ, t constants) pour des trajectoires de photons tangentiels, la métrique impose que pour satisfaire $ds^2=0$, on doit avoir $d\varphi=0$ (partout dans l'espace temps) et ceci en co et contre rotation (la métrique est insensible à l'orientation dans ce cas).

Reste à déterminer la valeur de $d\varphi/dt = 0/0$ dans ce cas, nous savons qu'elle est représentée par les courbes rouges et bleues de la figure 1 par exemple (elles ont été calculées à partir de la métrique).

On a donc une situation paradoxale où $d\varphi=0$ pour les photons, et où $d\varphi \neq 0$ pour une particule matérielle (trajectoire de type temps).

Ceci est paradoxal mais compatible avec la figure 1 ci-dessus, donnant la vitesse angulaire compte tenu de la définition que nous avons donné des régions de type temps.

Comment une ligne d'univers de type temps peut faire décroître la coordonnée temps?

Nous expliciterons ce caractère paradoxal par une représentation des vecteurs de base des coordonnées de Boyer Lindquist dans la base locale et réciproquement.

Base locale de vecteurs orthogonaux

Nous allons montrer par une représentation dans la base de vecteurs canoniques normés, U, S dérivés des vecteurs canoniques V et W que nous définirons au chapitre 15 (nous anticipons un peu) comment cela est possible. Rappelons que ces vecteurs sont orthogonaux entre eux et aux vecteurs de la base des coordonnées de Boyer Lindquist ∂_r et ∂_θ . A eux quatre ils forment une base orthogonale (mais non orthonormés).

Les vecteurs U, S sont plus représentatifs que V et W car dans ce cas le cône de lumière dans le « plan U, S » ne dépend pas de r (à la différence des vecteurs V, W), ce qui montre explicitement comment la base de coordonnées de Boyer Lindquist $\partial_t, \partial_\varphi$ évolue, par rapport au cône de lumière, en fonction de r .

Ils sont définis par:

$$\begin{aligned} V = (r^2+a^2) \partial_t + a \partial_\varphi & \rightarrow U = \frac{V}{|(\Delta\rho^2)|^{1/2}} = \frac{(r^2+a^2) \partial_t + a \partial_\varphi}{|(\Delta\rho^2)|^{1/2}} \\ W = a \sin^2\theta \partial_t + \partial_\varphi & \rightarrow S = \frac{W}{|(\rho^2 \sin^2\theta)|^{1/2}} = \frac{a \sin^2\theta \partial_t + \partial_\varphi}{|(\rho^2 \sin^2\theta)|^{1/2}} \end{aligned}$$

Pour un trou noir critique dans le plan équatorial $\theta = \pi/2$, $a = Gm = I$, ceci devient:

$$\begin{aligned} U &= \frac{(r^2+I) \partial_t + \partial_\varphi}{|(r-I)r|} \\ S &= \frac{\partial_t + \partial_\varphi}{|r|} \end{aligned}$$

Représentation des vecteurs de base dérivés des coordonnées de BL dans cette base.

En inversant ces relations, dans le plan t, φ qui est également le plan U, S on obtient:

$$\partial_t = \frac{|r(r-1)|U - |r|S}{r^2}$$

$$\partial_\varphi = \frac{-|r(r-1)|U + |r|(r^2+1)S}{r^2}$$

Calculons ces vecteurs dans le plan U, S pour $\theta = \pi/2$, pour $r = \text{constante}$ et différentes valeurs de r .

$r = \infty$	$\rightarrow$	$\partial_t = (U_-)$	$\partial_\varphi = -U + \infty.S$
$r = 2$	$\rightarrow$	$\partial_t = \frac{1}{2}U - \frac{1}{2}S$	$\partial_\varphi = -\frac{1}{2}U + 2,5S$
$r = 1$	$\rightarrow$	$\partial_t = -S$	$\partial_\varphi = 2S$
$r = 0,1$	$\rightarrow$	$\partial_t = 9U - 10S$	$\partial_\varphi = -9U + 10,1S$
$r = -0,1$	$\rightarrow$	$\partial_t = 11U - 10S$	$\partial_\varphi = -11U + 10,1S$
$r = -0,5$	$\rightarrow$	$\partial_t = 3U - 2S$	$\partial_\varphi = -3U + 2,5S$
$r = -0,9$	$\rightarrow$	$\partial_t = 2,1U - 1,1S$	$\partial_\varphi = -2,1U + 2S$
$r = -1,1$	$\rightarrow$	$\partial_t = 1,9U - 0,9S$	$\partial_\varphi = -1,9U + 2S$
$r = -\infty$	$\rightarrow$	$\partial_t = (U_+)$	$\partial_\varphi = -(U_+) - \infty.S$

Tableau 1

Cône de lumière dans la base U, S .

Le ds^2 local dans la base U, S , $\partial_r, \partial_\theta$ s'écrit:

$$c^2 d\tau^2 = du^2 - ds^2 - (\rho^2/\Delta).dr^2 - \rho^2.d\theta^2$$

Le cône de lumière à r et θ constants est défini par:

$$du^2 - ds^2 = 0$$

Soit

$$du/ds = 1$$

On voit qu'il ne dépend pas de r , ce qui va clarifier la comparaison de la position relative des vecteurs de base de la forme de la métrique de Boyer Lindquist qui eux dépendent de r puisqu'on va pouvoir faire cela sur un même diagramme.

Notons que c'est surtout la position angulaire qui est importante puisqu'elle va caractériser l'appartenance à une des régions définies par le cône de lumière.

Les composantes spatiales des vecteurs peuvent varier dans de large limites, n'oublions pas que le module se calcule par le produit scalaire et fait intervenir la métrique.

Comme nous représentons des vecteurs en utilisant les composantes contravariantes, par commodité nous appellerons « module » la longueur sur le diagramme, ce qui est un abus de langage au sens strict, comme nous venons de le dire.

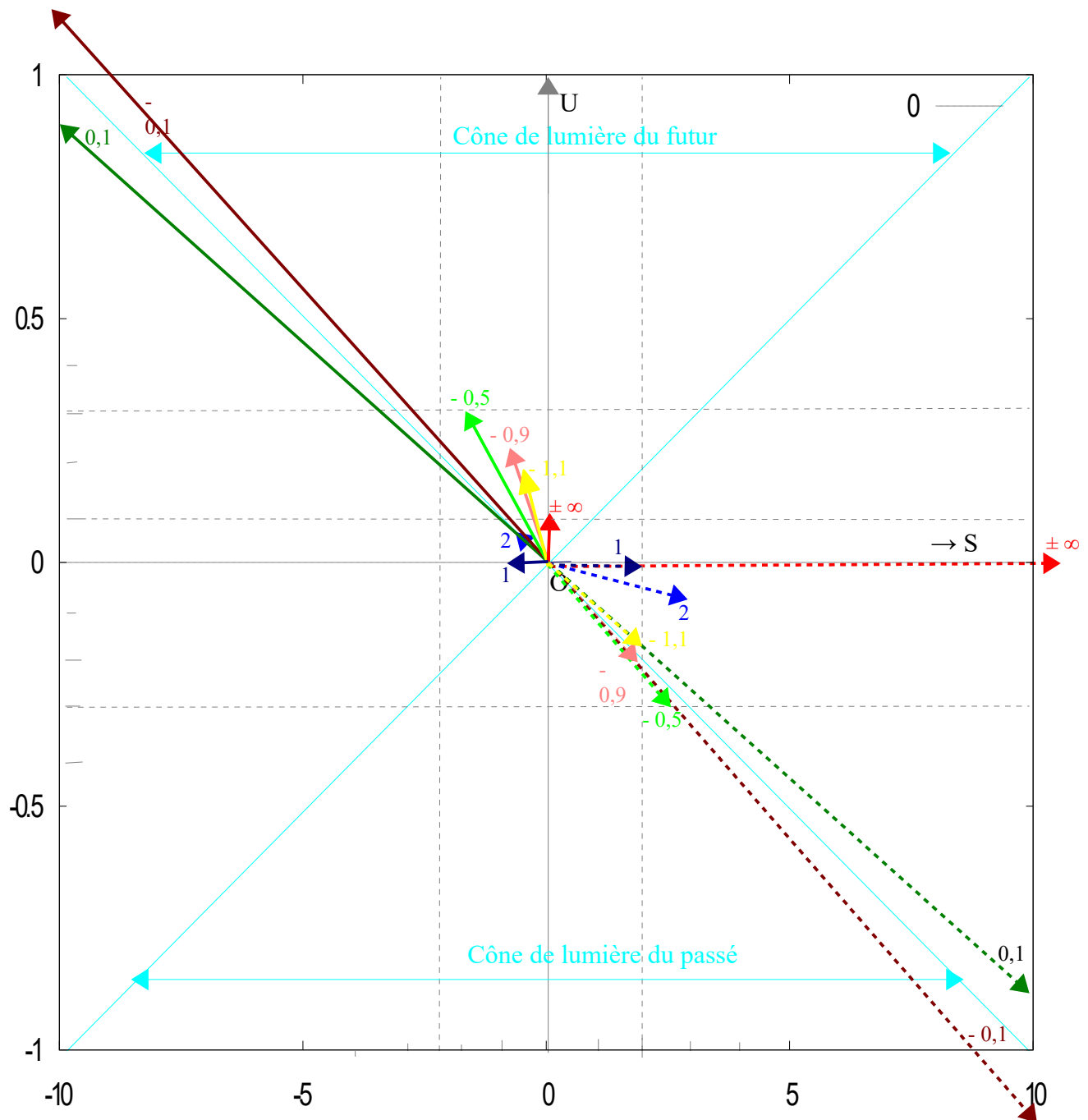


Figure 3 Représentation des vecteurs de base ∂_t (en trait plein) et ∂_ϕ (pointillés) dans la base U, S . Les vecteurs ∂_t et ∂_ϕ correspondant à une même valeur de r sont représentés de la même couleur. On a indiqué, avec la même couleur, sur les axes ∂_t et ∂_ϕ la valeur de r correspondante. Ceci visualise la variation (en rotation et module) de ces axes lorsque r varie. Les valeurs, dans cette base, des vecteurs ∂_t et ∂_ϕ représentés ici, sont celles du tableau 1 avant la figure. Le cône de lumière associé à l'évènement O est délimité par les droites $U = S$ et $U = -S$ (à 45°) en turquoise clair. Le cône du futur (de O) est en haut, celui du passé (de O) est en bas.

Vecteurs ∂_t et ∂_ϕ dans la base locale orthonormée (U, S) pour $r = +\infty$

Position, module, rotation et variation du module

Pour $r = +\infty$, représenté en rouge ∂_t est égal à U . (de type temps dans l'axe du cône de lumière) et ∂_ϕ est colinéaire à S (type espace dans le plan de simultanéité) mais de module infini ($S_{+\infty}$).

Ces vecteurs vont tourner dans le sens trigonométrique pour ∂_t et dans le sens inverse pour ∂_φ et tous deux vont varier en module lorsque r décroît.

Vecteurs ∂_t et ∂_φ dans la base locale orthonormée (U, S) pour $r = 2$ (ergosurface)

Position, module, rotation et variation du module

En $r = 2$, (sur l'ergosurface) représenté en bleu on voit que ∂_t est de type nul (sur le cône de lumière en contre rotation) et ∂_φ , bien qu'ayant tourné, est toujours de type espace.

Le sens de rotation de ∂_φ va s'inverser sur cette surface. Le module a diminué pour ∂_t et ∂_φ .

Vecteurs ∂_t et ∂_φ dans la base locale orthonormée (U, S) pour $r = 1$ (horizon double)

Position, module, rotation et variation du module

En $r = 1$ (horizon) représenté en bleu marine ∂_t qui a continué à tourner dans le même sens est de type espace (en fait depuis $r = 2 - \varepsilon$), dans le plan de simultanéité (de O) comme ∂_φ mais de sens opposé et de valeur différente.

Le vecteur ∂_φ a inversé son sens de rotation en $r = 2$, depuis il tourne dans le sens trigonométrique.

Mais lorsque r va devenir inférieur à 1, les sens de rotation de ∂_t et ∂_φ vont s'inverser, pour tourner tous les deux en sens inverse trigonométrique.

Vecteurs ∂_t et ∂_φ dans la base locale orthonormée (U, S) pour $r = 0,1$ (près de la singularité)

Position, module, rotation et variation du module

Lorsqu'on s'approche de la singularité (dans le plan équatorial, rappelons le⁷⁵), pour $r = 0,1$ par exemple, représenté en vert foncé:

$-\partial_t$ qui tourne dans le sens inverse trigonométrique depuis $r = 1$ est toujours de type espace mais se rapproche du cône de lumière (contre-rotation) et son module a considérablement augmenté.

- De son côté ∂_φ a continué à tourner dans le sens trigonométrique inverse et se rapproche du cône de lumière du passé (de O). Son module a considérablement augmenté.

Entrons dans la machine temporelle!

La situation décrite dans le référentiel local en coordonnées U, S

Rappelons que pour $\theta = \pi/2$ la machine temporelle s'étend dans l'intervalle $]0, -1]$ pour le trou noir de Kerr critique avec les unités que nous avons choisies.

Vecteurs ∂_t et ∂_φ dans la base locale orthonormée (U, S) pour $r = -0,1$ (près de la singularité)

Position, module, rotation et variation du module

⁷⁵ Rappelons aussi qu'on ne peut pas franchir $r = 0$ dans le plan équatorial (c'est la singularité), mais nous décrivons juste des situations à des valeurs de r différentes.

Dans la machine temporelle, près de la singularité, pour $r = -0,1$ en rouge foncé:

- ∂_t qui a continué à tourner en sens inverse trigonométrique, entre à nouveau dans le cône de lumière du futur de O, en contre rotation (son module est toujours important), tandis que ∂_φ qui a également continué à tourner en sens trigonométrique inverse entre dans le cône du passé de O (avec un module également important), ce qui fait que $-\partial_\varphi$ est dans le cône de lumière du futur et pour cette valeur de r (proche de zéro) fait un angle très faible avec ∂_t .

Les vecteurs ∂_t et $-\partial_\varphi$ sont quasiment colinéaires. L'extremum de l'angle devant se situer vers une ouverture tendant vers zéro (mais un module infini) pour une coordonnée $r = -\varepsilon$, tendant vers -0 .

Comme ∂_φ est tangent à la coordonnée φ en O, une ligne d'univers à coordonnées t, r, θ constantes, où seul φ varie dans le sens néгатif, a le vecteur $-\partial_\varphi$ pour tangente. C'est précisément le cas des boucles temporelles que nous avons décrites!

Ce diagramme montre que $-\partial_\varphi$ est localement dans le cône de lumière du futur de O, ici représenté dans le plan (U, S) . Ce cône de lumière a un caractère physique, ce qui est incontournable compte du caractère temporel de la ligne d'univers!

Du fait que l'angle entre ∂_t et $-\partial_\varphi$ est très faible, pour cette valeur de r , ce n'est pas l'idéal pour représenter graphiquement la situation dans les coordonnées de Boyer Lindquist, ce sera plus clair pour la valeur suivante.

Vecteurs ∂_t et ∂_φ dans la base locale orthonormée (U, S) pour $r = -0,5$ (au coeur de la machine)

Position, module, rotation et variation du module

En poursuivant l'étude pour $r = -0,5$ (vert clair) on voit que le secteur $(\partial_t, -\partial_\varphi)$ de violation de causalité tourne et s'ouvre par rapport à $r = -0,1$, tandis que le module des vecteurs diminue, ceci va nous permettre d'expliciter la phénoménologie.

Description détaillée de la situation du point de vue des coordonnées de Boyer Lindquist

Plaçons nous maintenant du point de vue de la représentation dans les coordonnées de Boyer Lindquist de vecteurs de base $(\partial_t, -\partial_\varphi)$, non orthogonaux sur le diagramme mais qui permettent cependant une analyse qualitative.

Comme cela n'est pas très lisible sur la figure 3 nous allons faire un zoom « fonctionnel ⁷⁶ » sur cette partie pour rendre l'exposé plus explicite.

⁷⁶ On va un peu ouvrir les angles pour y voir clair, (les échelles ne seront pas respectées, mais nous prendrons garde à ne pas modifier la phénoménologie.

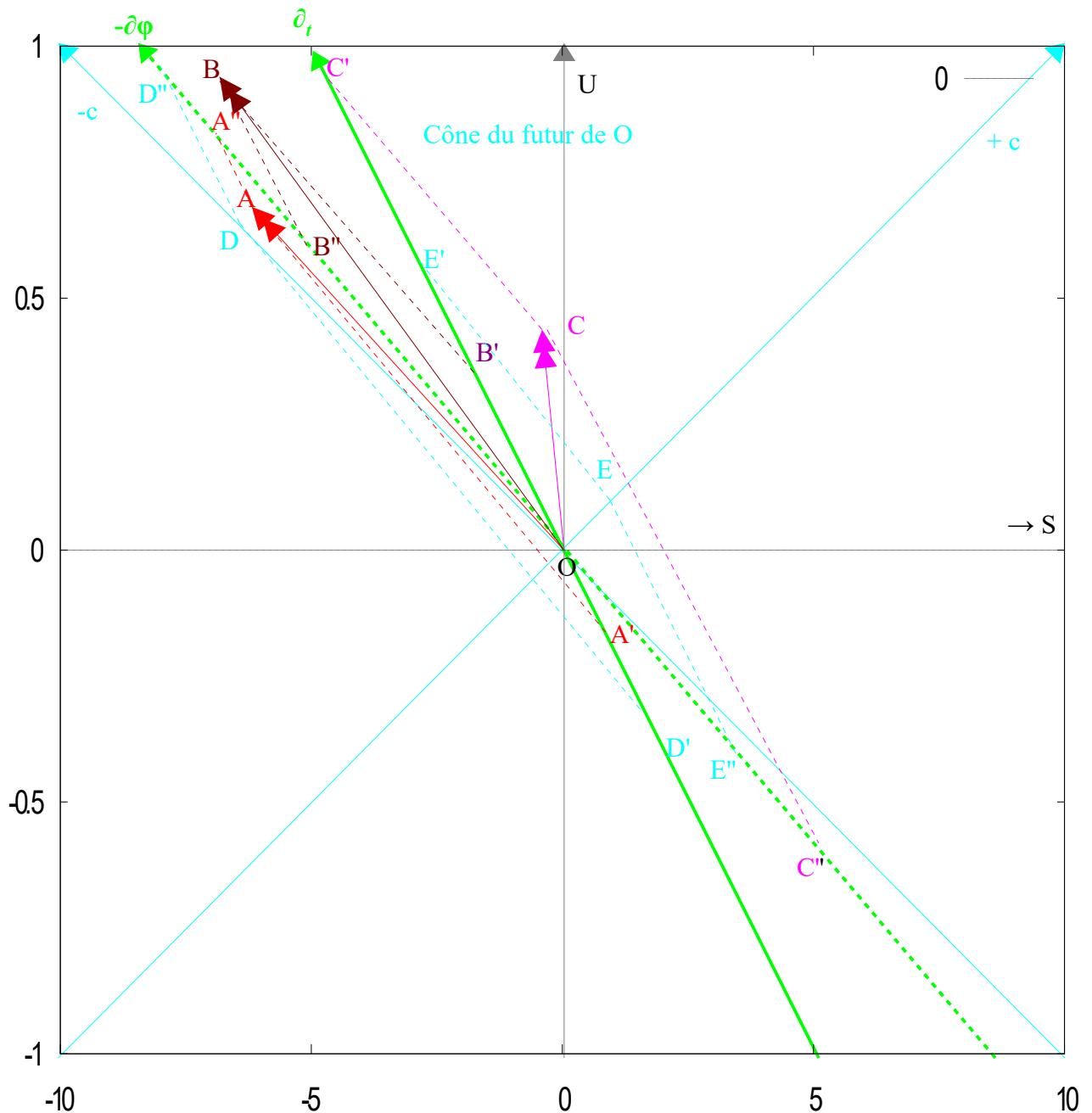


Figure 4: Zoom « fonctionnel » sur le cas $r = -0,5$. Dans le plan U,S, on a représenté:

Le cône de lumière $-c, +c$ (turquoise clair).

On voit que les géodésiques nulles issues de O sont à l'extérieur du secteur $(\partial_t, \partial_\phi)$ définissant la base locale des coordonnées de Boyer Lindquist.

Le futur de O est dans le cadran supérieur délimité par ces droites.

La coordonnée t localement en O, (en vert pour $r = -0,5$) colinéaire du vecteur de base ∂_t .

La coordonnée ϕ localement en O (en vert pointillé) colinéaire du vecteur ∂_ϕ .

L'orientation donnée par la flèche correspond à $-\partial_\phi$.

Une ligne d'univers locale en O qui « remonte le temps », dite critique, est représentée par un vecteur double fléché en rouge.

Dans les coordonnées t, φ , les coordonnées du point A extrémité du vecteur OA caractérisant le déplacement infinitésimal de l'observateur considéré sont $t = OA'$ et $\varphi = OA''$ qui s'obtiennent dans ces coordonnées non orthogonales de façon classique⁷⁷. Le rapport OA''/OA' caractérise $d\varphi/dt$.

On constate que d'une part $t < 0$, ce qui est caractéristique d'une variation négative du temps par rapport à O et que d'autre part $\varphi < 0$ également (contre rotation). Ce sont bien les lignes d'univers critiques qui nous intéressent.

Le cas limite $t = 0, \varphi < 0$, (l'axe - ∂_φ) est la boucle temporelle que nous avons étudiée au chapitre 12, pour laquelle $d\varphi/dt = \infty$.

Ce diagramme s'applique aussi à la géodésique nulle OD (c-) de coordonnées $OD' = t < 0$ et $OD'' = \varphi < 0$ qui est aussi critique à ce titre.⁷⁸

Pour la ligne d'univers OB représentée sur le diagramme, le même raisonnement peut être reconduit, mais ses coordonnées $t = OB' > 0$ et $\varphi = OB'' < 0$ caractérisent une boucle non critique d'un observateur tournant en contre rotation dont la coordonnée t augmente ce qui est caractéristique d'une ligne d'univers de type temps classique..

Pour la ligne d'univers OC, $t = OC' > 0$ et $\varphi = OC'' > 0$ caractérisent une boucle non critique d'un observateur tournant en co-rotation dont la coordonnée t augmente ce qui est caractéristique d'une ligne d'univers de type temps classique.

Ceci délimite 3 régions pour les lignes d'univers dans le cône du futur:

1- Entre c- (de type nul) et la ligne portée par $-\partial_\varphi$, on trouve les lignes d'univers de type temps critiques. Notons que $d\varphi/dt$ varie de $-\infty$ pour la boucle temporelle portée par l'axe - ∂_φ et $d\varphi/dt = OD''/OD' =$ environ 2,5, (la valeur relevée sur la figure 1 qui est à l'échelle est plus significative et on pourrait calculer la valeur exacte si on le souhaitait) pour la « géodésique nulle » c- avec $d\varphi/dt = OA''/OA' \approx 3,5$ valeur intermédiaire, pour la ligne d'univers OA.

Ces valeurs relevées sur le diagramme qui n'est pas à l'échelle n'ont qu'une valeur indicative, par contre elles illustrent la phénoménologie qui montre que ces valeurs décroissent lorsqu'on décrit le secteur critique en partant de l'axe $-\partial_\varphi$, jusqu'à la géodésique c-.

Notons que ceci est bien cohérent avec la figure 1 de ce chapitre où nous avons souligné que les lignes d'univers critiques se trouvent dans la région au dessus de la ligne d'univers en co-rotation.

Ajoutons que l'ouverture de la zone « critique » (l'angle c-, $-\partial_\varphi$) passe par un maximum quand la pente négative U/S de $-\partial_\varphi$, est maximum. Ceci se produit pour $r = 1 - (2)^{1/2}$.

2- Entre les axes $(\partial_t, -\partial_\varphi)$: Lignes d'univers non critiques de type temps en contre rotation.

3- Entre l'axe et c+: Lignes d'univers non critiques de type temps en co-rotation.

Nous avons ajouté la ligne d'univers nulle c+, OE de coordonnées $OE' = t > 0$ et $OE'' = \varphi > 0$ en co-rotation que nous avons déjà étudiée (cf figures 1 à 2 de ce chapitre).

La géométrie dans ces coordonnées non cartésiennes des lignes d'univers dans les coordonnées de Boyer Lindquist sur ce diagramme illustre clairement comment le rapport $dt/-d\varphi$ peut être plus petit

⁷⁷ Les coordonnées d'un point s'obtiennent en traçant les parallèles aux axes passant par ce point. L'intersection sur l'axe t donne la coordonnée t et celle sur l'axe φ la coordonnée φ .

⁷⁸ C'est la lumière en contre rotation ($\varphi < 0$ et $t < 0$) soit $d\varphi/dt > 0$. On note

pour $c+$ (rapport entre deux nombres positifs) que celui de $c-$ en contre rotation (rapport entre deux nombres négatifs) .

Ajoutons également la ligne d'univers (∂_t) qui correspond à un observateur « statique ».

Nous voyons que les lignes d'univers critiques de type temps (incluant la boucle temporelle portée par l'axe ∂_φ) sont situées entre l'axe ∂_φ et la géodésique lumière $c+$ (exclue). On voit sur le diagramme que cette région est d'autant plus étendue que $-\partial_\varphi$ est éloigné de $c+$, tout en restant de type temps, ce qui correspond à des valeurs de r se rapprochant de -1 .

Un autre critère que nous pouvons déduire implicitement de ce diagramme est relatif à la variation $-dt/-d\varphi$ en fonction de r pour ces lignes d'univers critiques.

Compte tenu que le module des vecteurs $-\partial_\varphi$ et ∂_t convergent en valeur lorsque r tend par valeur négative vers -0 , la construction géométrique utilisée nous indique que cette variation est d'autant plus grande que l'angle entre $-\partial_\varphi$ et ∂_t est petit, ce qui se produit également lorsque r tend vers zéro.

Vecteurs ∂_t et ∂_φ dans la base locale orthonormée (U, S) pour $r = -0,9$ (près de la sortie)

Position, module, rotation et variation du module

Pour $r = -0,9$ (en saumon) le même phénomène se poursuit, nous sommes toujours dans la machine temporelle mais près de sa limite externe.

Le vecteur $-\partial_\varphi$ qui a rebroussé chemin se rapproche du cône de lumière donc les paramètres propres à cette phénoménologie atteignent un autre extremum (maximum d'ouverture du secteur critique et minimum du rapport $-dt/-d\varphi$) lorsque r tend vers $(-1 + \varepsilon)$.

Sortons de la machine temporelle dans l'univers négatif.

Vecteurs ∂_t et ∂_φ dans la base locale orthonormée (U, S) pour $r = -1,1$ (juste à l'extérieur)

Position, module, rotation et variation du module

Pour $r = -1,1$ (en jaune la phénoménologie change puisque nous sortons de la machine temporelle!

Le vecteur ∂_t continue à tourner dans le même sens et reste de type temps, mais ∂_φ qui change de sens sort maintenant du cône de lumière du passé, ce qui fait que $-\partial_\varphi$ sort du cône de lumière du futur (de O). Il est revenu de type espace et la phénoménologie d'origine est retrouvée.

Vecteurs ∂_t et ∂_φ dans la base locale orthonormée (U, S) pour $r = -\infty$.

Position, module, rotation et variation du module

Lorsque r va tendre vers l'infini négatif les vecteurs ∂_t , ∂_φ en rouge à nouveau en continuant de tourner vont retourner vers leur position et valeurs d'origine de l'infini positif (U+) et (S- ∞).

Représentation (duale) de la figure 4 dans les coordonnées de Boyer Lindquist

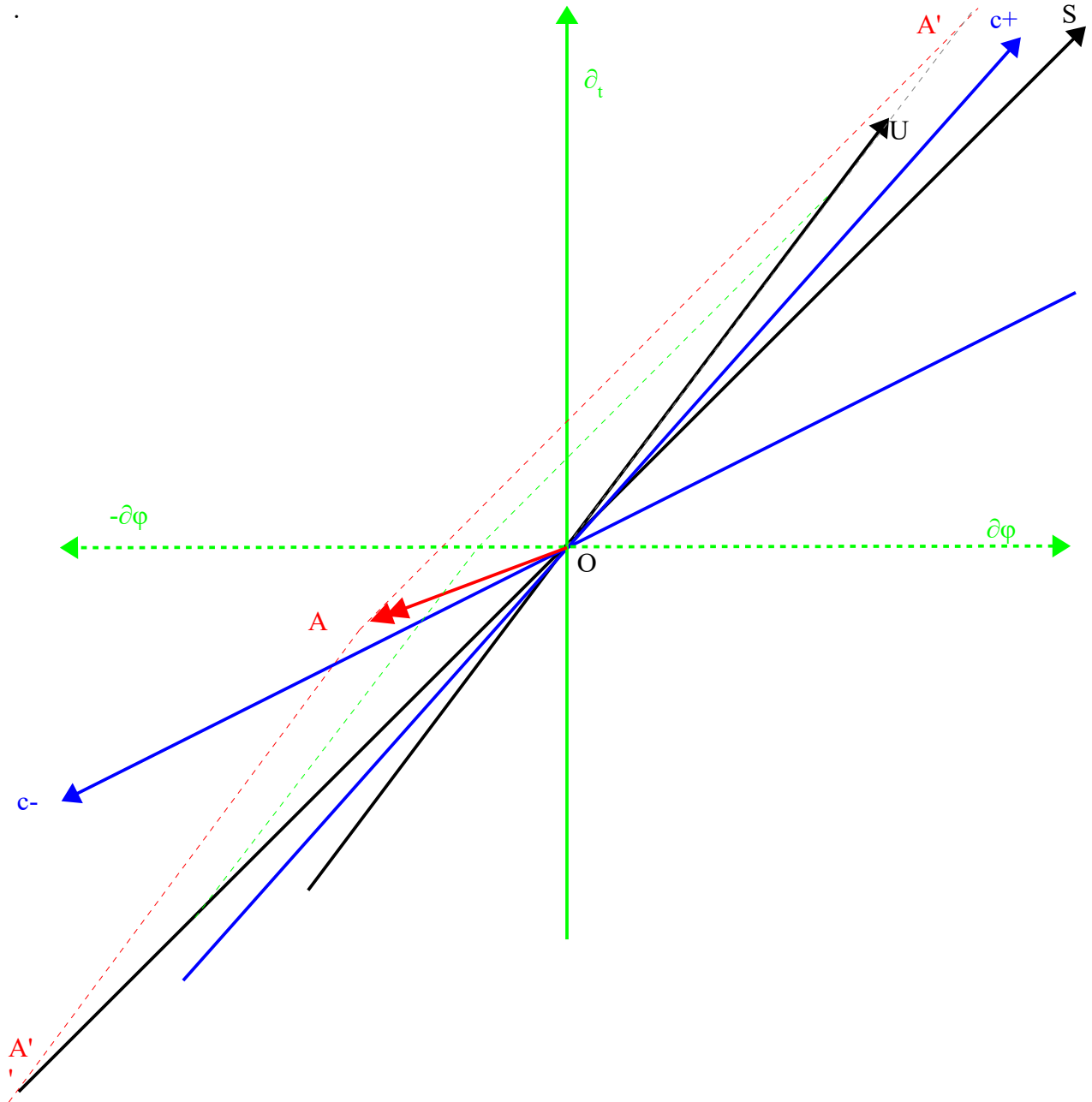


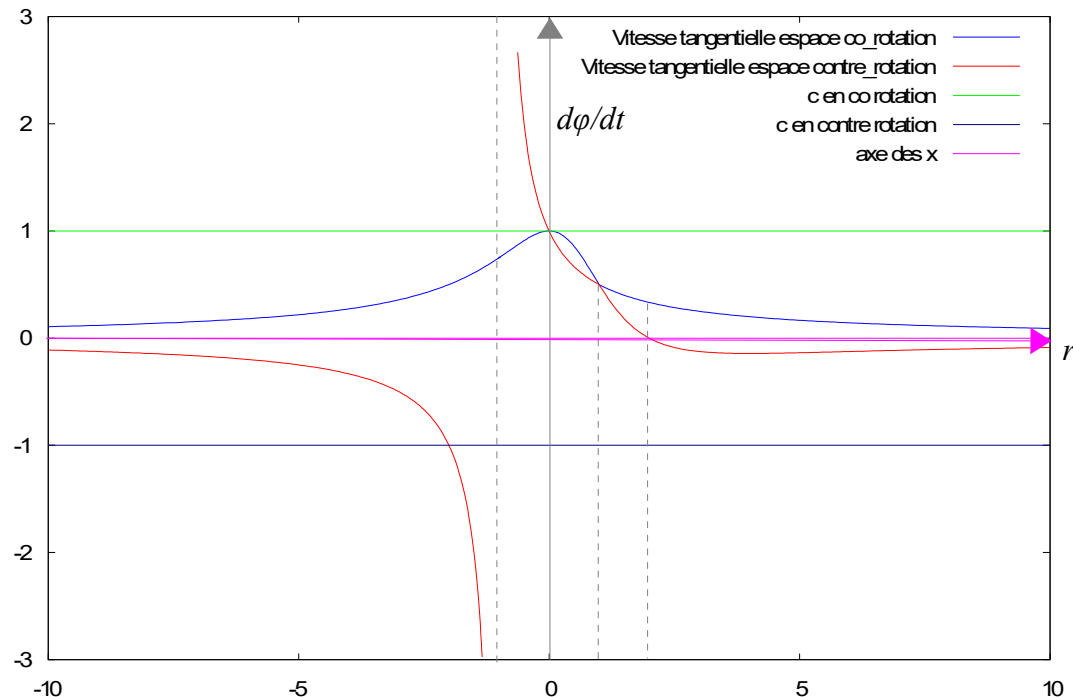
Figure 4 bis: Cette figure représente la même situation que la figure 4, avec les mêmes conventions, même si elle ne reprend pas tout ce qui était sur la figure 4 mais dans les coordonnées cartésiennes de Boyer Lindquist. On voit que ce sont alors les coordonnées U, S qui sont non orthogonales, mais que la géométrie transposée conserve bien la même topologie (les positions relatives de « voisinage ») vis à vis de la position relative des différents éléments représentés.

En particulier le vecteur OA en rouge de coordonnées $t < 0, \phi < 0$ et $U > 0, S < 0$ comme sur la figure 4, dans le secteur critique, délimité par la géodésique lumière en contre rotation $c-$ et ∂_ϕ , tout comme le vecteur de base ∂_ϕ est bien critique comme sur la figure 4. On pourrait vérifier que tout ce que nous avons dit sur la figure 4 se retrouve sur ce diagramme 4bis.

Ajoutons que cette représentation 4 bis, à caractère pédagogique est moins physique, que celle la figure 4 où les coordonnées cartésiennes étaient portées par les vecteurs U, S qui sont physiquement orthogonaux, alors que les vecteurs ∂_t et ∂_ϕ ne le sont pas.

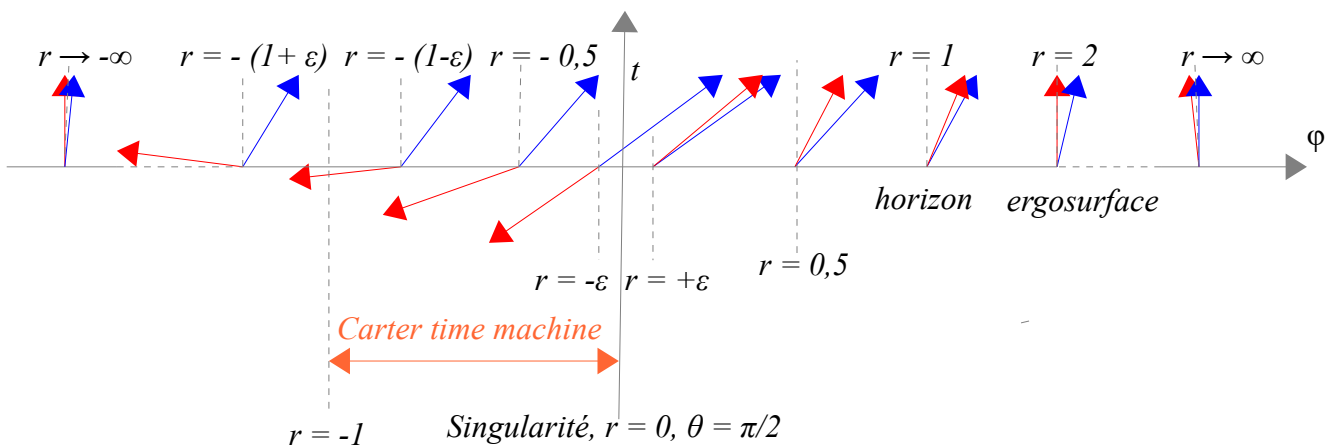
Evolution de la géométrie des cônes de lumière en fonction de r .

Rappelons le diagramme de la figure 1 de ce chapitre donnant $d\phi/dt$ tangentiel en fonction de r .



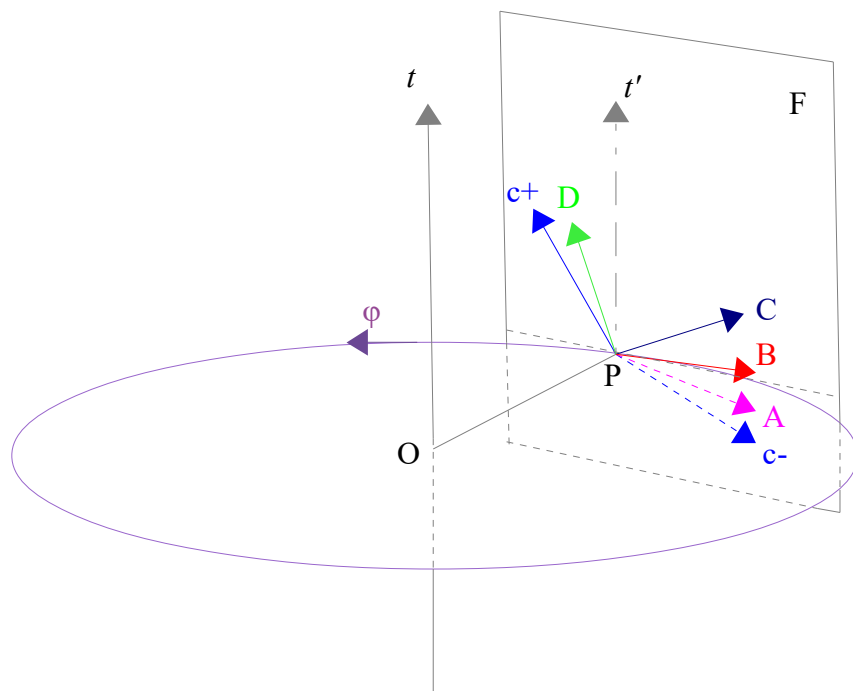
Nous avons étudié dans ce chapitre différentes représentations de la phénoménologie particulière de cet espace temps. A partir du diagramme ci dessus nous pouvons représenter cela par une séquence de cônes de lumière (tangentiels) qui montre leur évolution en fonction de r pour quelques valeurs représentatives.

L'axe horizontal des ϕ croissants est orienté vers la droite et l'axe vertical des t croissants vers le haut. Le rayon en co-rotation est en bleu et celui en contre rotation est en rouge.



On voit l'évolution de la géométrie des cônes de lumière $d\phi/dt$ lorsque r varie.

On note que dans la Carter time machine, le cône de lumière qui s'étend dans une région où la coordonnée temps de cette forme de métrique peut décroître permet l'existence de lignes d'univers de type temps en contre rotation où la coordonnée t décroît lorsque le paramètre affine τ (temps propre) s'accroît. C'est cette géométrie particulière qui le permet dans le cadre de cette solution de la Relativité Générale. Représentons cela sur un diagramme.



Ci dessus on a représenté une ligne d'univers à $r = OP = \text{constante}$, $t = \text{constante}$ en magenta foncé et $\theta = \pi/2$, définissant un plan dans l'espace .

Le sens de rotation (trigonométrique) de φ est donné par une flèche. En P on a représenté une ligne parallèle à t (trait noir interrompu long) notée t' , une coupe du cône de lumière ($c+$ et $c-$ en bleu clair, ce dernier étant en pointillé pour montrer qu'il est sous le plan défini par le cercle) par le plan perpendiculaire à OP en P donc tangent au cercle. De ce fait $c+$ et $c-$ définissent un plan F .

On note la dissymétrie du cône de lumière par rapport à l'axe t .

En P on a représenté localement 4 observateurs de 4-vitesse PA , PB , PC , PD de couleurs différentes. Ces vecteurs sont tous dans le plan défini par $c+$ et $c-$.

L'observateur A suit une ligne d'univers en contre rotation qui « remonte » localement le temps, comme son vecteur local de 4-vitesse en pointillé l'indique (sous le plan défini par la boucle temporelle. Cette ligne d'univers est en délicatesse avec la causalité. La ligne d'univers globale n'est pas représentée mais elle est facile à imaginer.

L'observateur B suit une ligne d'univers (le cercle de rayon OP) en contre rotation qui est une boucle temporelle, (vecteur 4-vitesse tangent au cercle de rayon OP), également en délicatesse avec la causalité !

L'observateur C suit une ligne d'univers en contre rotation qui suit localement le temps (respecte la causalité).

L'observateur D suit une ligne d'univers en co-rotation qui suit localement le temps qui est également respectueuse de la causalité.

Quelques arguments physiques invoqués pour mettre en doute cette machine temporelle.

Commençons par quelques arguments qui mettent en cause le caractère physique d'une telle phénoménologie.

Réalité physique de la région sous l'horizon interne .

Nous avons vu que pour atteindre la région où pouvait se produire des boucles temporelles, en partant de « notre univers », il fallait franchir l'horizon interne du trou noir.

D'un point de vue formel, l'horizon interne étant un horizon de Cauchy on peut raisonnablement douter de la réalité physique de ce qui est au-delà (déconnecté causalement de notre univers). Voir par exemple [47] p. 421 qui le considère comme non physique.

En particulier, comme cela sera développé plus loin sur l'exemple de la vitesse angulaire du trou noir, un observateur à l'infini positif est dans l'impossibilité de faire la moindre mesure physique sur les phénomènes se déroulant au delà de l'horizon externe des événements et a fortiori au delà de l'horizon interne de Cauchy.

Ceci indique de cette notion de boucle doit s'apprécier pour des observateurs dans cette région contenant l'anti-univers, que nous pouvons décrire comme l'univers positif en renversant le sens du temps. Mais quelles peuvent être les conséquences de boucle temporelles dans une région où le temps est renversé ?

D'un point de vue physique, nous avons vu que pour franchir cet horizon⁷⁹, un objet matériel (à plus forte raison, un vaisseau spatial et son équipage) était exposé à un décalage infini vers le bleu de tout rayonnement venant de l'extérieur, ce qui est sans doute fatal à la bonne santé du vaisseau et de son équipage. D'autre part cet horizon interne ne peut exister que dans un TN éternel, puisque dans un TN de Kerr physique sur les coordonnées correspondant à l'horizon, le TN n'existe pas encore (et donc l'horizon)!

Que des géodésiques (qui sont des courbes caractéristiques de cet espace temps, de nature géométrique) puissent y accéder, n'est pas une preuve que des objets matériels physiques puissent le faire. La relativité générale définit une géométrie, et les particules réelles ou les photons dont on parle, sont des traceurs virtuels de cette géométrie.

Sur ce point on peut citer les travaux de W. Israël, Droz, Morsink [39] qui mettent en doute l'existence d'un tel horizon, du moins dans un espace sans constante cosmologique et dans le cadre de la Relativité générale « classique », et ceci dans les trous noirs astrophysiques résultant d'un effondrement d'étoile, au motif que cet effondrement devrait être parfaitement symétrique (ce qui correspond à un ensemble de mesure nulle), pour générer un tel horizon « de Cauchy ». Dans cette hypothèse le modèle du trou noir incluant sa machine temporelle est il encore valable? Mais comme cette démonstration s'appuie sur un modèle « approché » (Trous noirs de Reissner Nordström) et on se doit en rester circonspect!

Les coordonnées ne sont pas physique comme le montre la phénoménologie.

On peut également objecter que les coordonnées n'ont pas de caractère physique.

En particulier la variable t qui est bien de type temps, du moins à l'infini est associée au « temps » en raison de sa convergence réputée asymptotique avec le temps propre, à l'infini positif, mais à l'infini

⁷⁹ Signalons le cas d'un trou noir « critique » lorsque $M=a$, dans lequel il n'y a pas « d'horizon », en fait les horizons internes et externes sont confondus. C'est un cas instable naturellement, mais nous l'utiliserons souvent dans les calculs comme cas limite, car il est typique de la phénoménologie de la rotation.

négalif nous avons vu que pour la géodésique axiale la phénoménologie s'inverse (par rapport au centre de symétrie), autrement dit correspond (dans l'anti-univers) à un temps inversé par rapport à t !

De plus, dans la solution de Kerr elle n'est pas forcément la coordonnée de type temps qui converge le mieux avec le temps propre d'un observateur inertiel à l'infini, comme la suite va le montrer, et dans ce cas on peut s'interroger sur le caractère critique physique de boucles sur cette coordonnée!

Ceci ne met pas en cause l'existence de boucles qui sont un invariant topologique mais leur nature!

Formellement, en effet, les coordonnées ne sont que des étiquettes associées aux points de la Variété.

Entre la métrique « originale de Kerr » qui avait l'intérêt de comporter un vecteur « nul » (∂_t), mais ne mettait pas bien en évidence les symétries de la métrique, celle qui est la somme d'une métrique plate et du produit tensoriel d'un vecteur nul par lui-même qui résulte de la recherche systématique originelle de Kerr et les quelques autres dont la forme de Boyer Lindquist qui est la plus utilisée, on fait aussi largement usage des coordonnées avancées et retardées⁸⁰.

In fine, pour décrire la situation physique nous avons vu qu'il fallait passer en représentation par une base locale associée à l'espace temps tangent local.

Dans cette solution de Kerr, pour cette description locale, on fait appel souvent, au formalisme de Newman Penrose qui est celui qui décrit le plus simplement la structure locale de cet espace temps dans l'environnement physique local de l'observateur considéré: ce que ses instruments lui indiquent.

Pourtant définir une « tétrade » comportant des vecteurs nuls (et d'autres complexes) n'est pas forcément la première idée qui vient à l'esprit du physicien mais elle sous tend bien l'idée que la lumière est l'élément structurant de ces espaces temps, sans qu'on en comprenne vraiment toute la nature intime.

Le référentiel en coordonnées de Boyer Lindquist n'est pas inertiel.

C'est un aspect que nous avons déjà souligné à propos de l'interprétation physique du quatrième invariant de Carter. Nous avons alors vu que conduisait à ajouter des termes de « rotation » supplémentaires. L'analyse du point précédent révèle un entraînement de référentiel critique et en fait les boucles décrites dans le calcul ne sont peut être pas possibles « physiquement ».

Respect des hypothèses de non perturbation du champ par la « particule de test ».

On a vu que voyager sur des boucles « temporellement critiques » n'est pas « gratuit », c'est le moins qu'on puisse dire...

En particulier, il est impossible de soutenir que la masse du corps d'épreuve peut être négligée, hypothèse pourtant fondamentale que nous avons utilisée dans nos calculs. Compte tenu des quantités de matière énormes éjectées, et à proximité du corps (ce qui modifie localement la métrique), dans le cas concret de propulsion par réaction.

Limites liées à l'émission d'ondes gravitationnelles dans un tel système.

Les calculs numériques nous ont montré que la masse initiale du corps décrivant une boucle temporelle était importante. L'émission d'ondes gravitationnelles par le système trou noir et la masse en « orbite » doit être importante. Ce facteur n'a pas été pris en compte dans les calculs.

Par ailleurs du fait de la configuration nous ne sommes sans doute pas dans l'approximation ondes gravitationnelles planes, ce qui veut dire que les solutions ne peuvent être que numériques.

⁸⁰ Voir annexe 3 pour une description de ces coordonnées en métrique de Kerr.

C'est un élément de plus qui montre que le calcul qui a été fait sous estime sans doute l'ampleur du phénomène par des facteurs non négligeables.

Limites liées à la « tension maximum » en RG entre deux corps.

Certains articles [57] font remarquer que dans le cas de deux corps à symétrie sphérique, la RG impose une limite à la tension d'attraction entre les deux, du fait que même dans l'état le plus condensé (trous noirs) dès qu'il y a interpénétration des horizons, la fusion des deux corps pour n'en faire plus qu'un commence (ceci est fait dans le cas de TN de Schwarzschild, mais doit pouvoir s'adapter au cas des TN de Kerr)

Compte tenu de la masse du corps orbitant, si on calcule son extension minimum (trou noir) cela ne conduit il pas à la « fusion » de l'objet avec le trou noir, avant sa pénétration dans l'anti-univers ?

Tout ceci montre que l'exemple de la fusée qui a été donné est complètement inadéquat et ne saurait rendre compte sérieusement du phénomène que l'on se propose de décrire.

A la recherche d'explications plus formelles

2- Peut on déduire des « inégalités » ?

Les calculs faits précédemment ont supposé que la masse donc l'énergie du système en situation de violation de causalité ne perturbait pas le champ pourtant réputé très sensible à la symétrie.

Au vu d'une tentative (dans des hypothèses simplificatrices et contestables) pour réaliser une expérience de ce type, nous avons vu que nous pouvions fortement douter de ce fait.

Peut être que la situation est d'ailleurs bien pire que ce que nous avons calculé, au vu des simplifications que nous avons faites. Peut être qu'une étude plus réaliste montrerait que cela conduit à une impossibilité en mettant en lumière une relation entre l'énergie nécessaire pour se maintenir dans une telle zone critique sur une boucle et l'énergie du système lui-même, ce qui conduirait par exemple à sa destruction si cette énergie est égale à celle du système ou une impossibilité si elle est supérieure.

Dans l'état de l'analyse, (où du fait du caractère « continu » du phénomène décrit, la masse restante décroît exponentiellement, elle tend vers zéro mais sans jamais l'atteindre, ce qui ne serait pas le cas si on quantifiait le problème) on ne peut pas conclure sur ce point, même si on peut avoir de sérieux soupçons.

3- Boucles temporelles et énergie négative

Une manière de progresser serait peut être d'analyser sous un autre éclairage le phénomène en faisant un lien entre l'énergie « négative » en QFT et la phénoménologie de la singularité en anneau et sa Carter time machine associée.

La gorge délimitée par la singularité correspond à la description d'un « trou de ver » qui peut être géant dans notre cas (méga et giga trous noirs) et qui serait stabilisé par l'énergie négative de « rotation ». La phénoménologie autour de la singularité (divergence des géodésiques nulles qui traversent la gorge), et la répulsivité de la singularité (associée masse négative en relativité Générale) est caractéristique des propriétés qu'on prête à l'énergie « négative » en QFT⁸¹.

De même la possibilité de « remonter » le temps est une propriété qu'on associe généralement à l'énergie négative. Ceci relève d'une autre étude qui ne sera pas développée ici.

⁸¹ Voir [4] pour quelques éléments sur l'énergie « négative » en QFT

Ces considérations nous conduiront à regarder de plus près le concept de causalité en relativité générale.

4- Trajectoire du centre de masse.

Remarquons que dans le phénomène décrit, le centre de masse (fusée + éjectats) décrit une géodésique.

Du point de vue de la Relativité on a donc affaire à une géodésique, la partition entre « charge utile » et « produit éjectés » est un problème qui devrait ne pas relever de la relativité générale mais pourrait être décrit par une information complémentaire aux lois de la RG qui pourrait être représenté dans un espace interne en chaque point.

5- Holonomie des boucles temporelles et causalité.

Le propagateur parallèle permet de calculer comment un vecteur $V^\mu(\lambda)$, transporté parallèlement le long d'une courbe de paramètre affine λ , se transforme entre $\lambda = \lambda_0$ (départ) et l'arrivée à λ . (c.f [44] annexe I). L'équation de transport parallèle s'écrit :

$$(dx^\mu/d\lambda).(V^\nu{}_{;\mu}) = (dx^\mu/d\lambda)\partial_\mu V^\nu + (dx^\mu/d\lambda)\Gamma^\nu_{\mu\sigma}V^\sigma = 0$$

Le propagateur parallèle $P^\mu{}_\nu(\lambda, \lambda_0)$ est défini par :

$$V^\mu(\lambda) = P^\mu{}_\nu(\lambda, \lambda_0)V^\nu(\lambda_0)$$

On peut calculer le propagateur parallèle dans le cas général, il vaut:

$$P^\mu{}_\nu(\lambda, \lambda_0) = \exp\left\{-\int_{\lambda_0}^{\lambda} \Gamma^\mu{}_{\sigma\nu}(dx^\sigma/d\eta)d\eta\right\}$$

Cette équation est valable dans tous les cas. Dans le cas où la courbe sur laquelle on opère le transport est fermée (ici comme $\lambda = \varphi$, si $\lambda = \lambda_0 + 2\pi$), si la connexion est métrique (ce qui est le cas), le propagateur parallèle est une matrice correspondant à une transformation de Lorentz dans l'espace tangent au point de fermeture de la courbe. La transformation associée est appelée l'holonomie de la boucle.

Calculons l'holonomie de notre boucle temporelle, où les $\Gamma^\mu{}_{\sigma\nu}$ se réduisent à $\Gamma^\varphi{}_{\varphi\varphi} = (1-2M/r + a^2/r^2)(Ma^2/r^2 - r)$ seul terme non nul, qui est constant sur la courbe car r est constant et où $\mu = r$, $\nu = \sigma = \varphi$.

Alors :

$$P^\mu{}_\nu = P^r{}_\varphi = \exp\left\{\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} \Gamma^\varphi{}_{\varphi\varphi} \cdot (d\varphi/d\eta)d\eta\right\} = \exp(2\pi\Gamma^\varphi{}_{\varphi\varphi}) = \exp\{(1-2M/r + a^2/r^2)(Ma^2/r^2 - r)\}$$

ce qui permet de calculer V^r par: $V^r = P^r{}_\varphi V^\varphi$.

La théorie dit que l'holonomie consécutive au transport parallèle sur une boucle, dans le cas d'une connexion métrique est représentée par une transformation de Lorentz, qui dans notre cas ne contiendrait qu'un seul terme non nul de type $\Lambda^r{}_\varphi$. Calculons le pour $M = a = -2r$.

Choisissons $V = V_\varphi = V(0, 1, 0, 0)$ qui (à un facteur $d\lambda/d\tau$ près) est le vecteur vitesse tangent à la trajectoire en coordonnées (t, φ, r, θ) . Il se transforme en un vecteur radial par $V' = (0, 0, [\exp(-162\pi r)], 0)$ où $V^r = [\exp(-162\pi r)] \cdot V^\varphi$ de module $\approx 10^{-150r}$.

Ajoutons que, dans l'exemple de boucle temporelle que nous avons traité, en appliquant la formule du propagateur sur une partie infinitésimale (entre φ_0 et $\varphi_0 + d\varphi$ par exemple) le quadri-vecteur vitesse tangentielle (proportionnel à l'impulsion de la particule) qui n'a qu'une composante non nulle ($d\varphi/d\tau$) se transforme intégralement en composante radiale dès cette première itération infinitésimale. Sauf à

régénérer continument cette composante tangentielle (l'impulsion de la particule) la suite du transport donnerait un résultat nul⁸².

Cette régénération ne peut résulter que de l'impulsion transmise continument par la fusée, mais dans ce cas cette impulsion détruite étant recrée continument tout lien causal dans le mouvement semble brisé.

On peut donc douter que ce soit la même particule qui décrit la boucle temporelle. Ceci ressemble à un processus de destruction/création de particule en continu sur cette boucle ce qui illustre la brisure de causalité sur une telle trajectoire.

Cette propriété montre donc que ce type de boucle est singulier. Pour autant nous n'avons pas prouvé qu'il n'existe pas de boucles temporelles (d'un autre type où t n'est pas constant par exemple) qui ont un résultat non singulier.

6- A la recherche d'une solution: Y a il vraiment violation physique de causalité?

L'affirmation concernant la violation flagrante de causalité dans la région III (sous l'horizon interne) s'appuie sur le fait qu'il y existe des points événements A et B de coordonnées respectives $(t_1, r_1, \theta_1, \varphi_1)$ et $(t_2, r_2, \theta_2, \varphi_2)$ telles qu'on peut les relier par des lignes d'univers de type temps (balisées par un temps propre d'observateur) orientées (dans le sens croissant du temps propre) dans les deux sens.

Autrement dit sur la courbe A vers B , B est dans le futur de A et sur la courbe B vers A c'est A qui est dans le futur de B , ce qui semble être le signe d'une violation flagrante de causalité!

Mais ceci concerne des point-événements (à coordonnées fixes) repérés dans les coordonnées générales de cet espace temps et est un critère strictement géométrique.

Cela peut il entraîner une violation physique de causalité pour des observateurs ou objets matériels associés à ces points événements?

Pour cela il faut tenir compte que les observateurs associés à ces points événements ne sont pas fixes et décrivent des lignes d'univers!

La causalité se définit par la chaîne de cônes de lumière le long de la ligne d'univers délimitant le futur du passé d'un observateur en chaque point.

Rappelons qu'une ligne d'univers de type temps même « remontant le temps », (dans la machine temporelle dans les coordonnées globales de Boyer Lindquist par exemple) est toujours dans du cône de lumière puisqu'il l'est dans l'espace local tangent de Lorentz et que cette propriété est de nature topologique (dans une région délimitée par une hypersurface) donc insensible aux changements de coordonnées et que c'est la géométrie assez peu ordinaire dans la machine temporelle dans les coordonnées de Boyer Lindquist qui fait que le cône de lumière se déforme pour permettre cela!

Considérons le cas d'une boucle décrite par un observateur et sur celui plus général, cité ci dessus, des deux observateurs, l'un en A l'autre en B .

Un observateur A décrivant une boucle de type temps, lorsqu'il repasse par les mêmes coordonnées générales (t, r, θ, φ) .

⁸²Le champ de quadri-vecteurs vitesse dont la courbe intégrale est la boucle temporelle s'annihile lui même sur sa courbe intégrale! Nous avons qu'il existe un sous espace annihilateur de ce champ de vecteur. C'est un ensemble de vecteurs duals $\omega_\mu^{(a)}$, avec $V^\mu \omega_\mu^{(a)} = 0$, dans notre exemple où $\omega_\mu^{(a)} = \sum_b g^a_b f^b_{;\varphi}$, où f^b sont les fonction constantes sur le sous espace défini par la boucle ($\theta = \text{cste}$, $t = \text{cste}$, $r = \text{cste}$). Le mouvement d'une particule sur une telle boucle temporelle est impossible!

Pour autant son temps propre mesuré sur sa ligne d'univers est différent de celui du passage précédent (il a vieilli), le paramètre affine de sa ligne d'univers (son temps propre) n'est pas bouclé même s'il repasse par les mêmes coordonnées générales (t, r, θ, φ) .

En effet, comme cela est bien connu en relativité générale, le temps propre d'un observateur est découplé de celui des autres (ils peuvent tous être différents sur des chemins reliant deux mêmes points spatio-temporels) et est également découplé de la coordonnée temps utilisée pour baliser la variété décrivant cet espace temps.

Il ne risque pas de se rencontrer (il n'y est plus à cette position sur sa ligne d'univers, son paramètre affine ayant augmenté) et encore moins d'entreprendre une action sur son présumé fantôme qui risquerait de modifier le passé de sa ligne d'univers: Il a vécu jusque là et rien ne le remettra en cause son histoire.

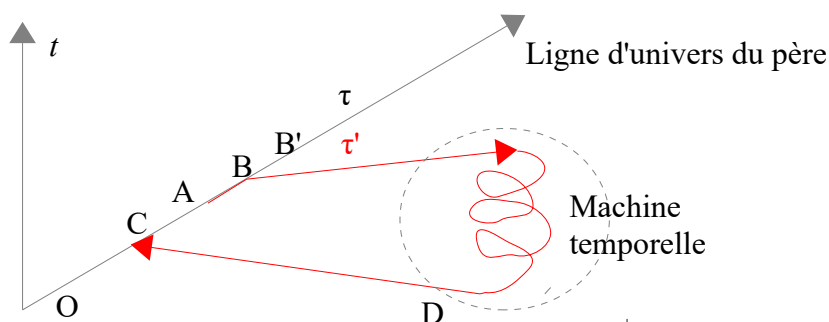
L'espace temps dans lequel l'observateur décrit des boucles n'est qu'un « cadre » permettant d'en décrire la chrono-géométrie ce qui permet entre autres de relier les paramètres des différents observateurs.

Ce raisonnement s'étend simplement à une interaction entre deux observateurs, (ils sont formellement équivalents), puisque le critère de violation fait intervenir implicitement une boucle. La violation est caractérisée par le fait qu'un événement A a pu provoquer l'événement B , car une ligne d'univers de type temps orientée de A vers B les relie et que B a pu provoquer A (qui était sa cause!) car une ligne d'univers de type temps orientée de B vers A les relie.

Mais ceci ne prend pas en compte l'intégralité du caractère physique du phénomène.

En effet, un paradoxe comme celui du père assassiné par son fils profitant de la machine temporelle pour remonter dans la coordonnée temps (à supposer que ce soit possible, ce que la suite va rendre douteuse) pour perpétrer le méfait à une époque (au sens de la coordonnée temps du TN) où il n'était pas encore conçu, juste pour voir si cela remet en cause son existence, si elle ne prévient pas de l'attentat, ne remet pas en cause l'histoire passée des deux impétrants!

On peut schématiser le paradoxe par les lignes d'univers du père et du fils comme suit:



En O le père n'a pas d'enfant et suit sa ligne d'univers, temps propre τ .

En A l'enfant naît et suit la même ligne d'univers que son père. En B , il se sépare du père et va dans la machine temporelle (temps propre τ') pour accumuler un crédit de temps (coordonnée t) suffisant pour revenir sur la ligne d'univers de son père avant sa naissance en C .

Mais son père est en B' , en effet sans préjuger de la ligne d'univers de l'enfant (de temps propre positif), le temps propre du père n'a pu qu'augmenter, donc son fils ne le trouve pas et on évite ainsi un drame familial!

Notons que si on connaît tous les paramètres des lignes d'univers dans les coordonnées générales (t, r, θ, φ) , en particulier la ligne d'univers suivi par le père, ici représentée par une droite pour simplifier le diagramme (mais cela peut être autre chose), les coordonnées des points B, C et la ligne d'univers décrite par le fils entre B et C, on peut alors calculer (en principe au moins, car cela risque d'être complexe), grâce à la métrique globale (elle sert entre autres à cela), les paramètres du problème.

Ceci montre l'importance d'une définition physique du critère de causalité pour en cerner sa violation!

7- Proposition: Le cinquième élément: Un degré de liberté dans un espace interne local.

Comme nous l'avions noté au début du chapitre, l'appartenance à une région délimitée par des coordonnées n'est qu'un paramètre non totalement déterminant et insuffisant pour entraîner la phénoménologie des boucles temporelles. Il y a des contraintes supplémentaires! Le paragraphe précédent illustre et confirme que le paradoxe résulte d'un déficit d'information concernant l'observateur.

Ses quatre coordonnées (4 degrés de liberté) dans l'espace temps ne définissent pas totalement l'état du système (l'observateur sur sa ligne d'univers)! Dans l'exemple cité il faut un degré de liberté supplémentaire: son temps propre.

Ceci peut être réalisé en définissant un fibré en ajoutant un espace interne localement en tout point de l'espace temps.

Cet espace interne associé à l'observateur peut contenir les informations propres à l'observateur, comme un âge par exemple mesuré par une horloge associée (paramètre affine sur sa ligne d'univers, pour un observateur physique: temps propre écoulé depuis une origine définie).

Alors les paradoxes du type grand père ne se posent plus.

On peut faire remarquer que ceci n'a rien d'artificiel, puisque la relativité générale définit une géométrie d'espace temps et des géodésiques (La solution de Kerr Newmann montre que nous pouvons aussi étendre cette notion de géodésique (solution de B. Carter) en y incluant un champ électrique.

Cette géométrie étant définie on peut par des procédés purement géométriques définir des courbes autres que géodésiques (encore faut il alors définir des forces puisque la seule gravitation conduit à des géodésiques même généralisées), mais est encore de la relativité générale.

Quant aux observateurs ce sont des « marqueurs » de ligne d'univers, qui nous permettent de nous mettre « en situation » pour prédire des résultats de mesures physiques mais qui n'ont rien de nécessaire dans la théorie.

8- Lignes d'univers non géodésiques et relativité générale.

La relativité générale, théorie géométrique de la gravitation, définit un espace temps dynamique (vis à vis des masses générant et subissant la gravitation, dans lequel les géodésiques sont bien géométriquement définies et sont les lignes suivies par des particules de test qui subissent la gravitation, mais dont on néglige le champ généré, autrement dit qui ne contribuent pas au caractère dynamique de la théorie, donc sont simplement couplées (sans y contribuer) à l'espace courbe déterminé par la solution de la relativité générale pour ce type d'univers.

Pour les lignes d'univers non géodésiques, la cause de ce caractère non géodésique ne peut provenir que de phénomènes autres que la gravitation donc ne dérive pas directement de l'équation d'Einstein. Notons

qu'on peut dans certains cas (Univers à symétrie sphérique chargé, solution de Kerr Newmann, etc..?) globalement coupler d'autres champs à la gravitation, la solution géodésique générale pouvant alors tenir compte de ces différents champs. Un bel exemple est celui de la solution donnée par Brandon Carter pour l'espace temps de Kerr Newmann. Mais dans le cas où cela n'est pas possible (par exemple un transfert d'impulsion localement comme dans le cas d'une fusée qui fonctionne par réaction) elles ne peuvent avoir leur source physique que dans l'espace temps tangent. Ceci justifie qu'on introduise alors des données complémentaires dans cet espace tangent (espace interne) pour décrire la phénoménologie induite. Pour ces causes complémentaires locales on doit définir leur couplage (non dynamique) avec l'espace courbe considéré comme l'espace de fond non dynamique.

9- Synthèse sur ce chapitre

Nous avons tenté de caractériser la phénoménologie de ces boucles, dans le contexte formel qui les définit, en partitionnant en différents sous ensembles l'espace temps selon leur comportement vis à vis de cette phénoménologie.

Nous avons montré comment formellement l'entraînement de l'espace en rotation dans la machine temporelle faisait qu'en contre rotation les particules réelles pouvait avoir un mouvement propre plus élevé que les photons, ce qui est une condition nécessaire et suffisante pour suspecter une violation de causalité, compte tenu de sa définition, en faisant observer que ce concept est local et que si on veut l'intégrer sur une boucle à $r = \text{constante}$ par exemple, on voit mal comment, uniquement dans le cadre de la relativité générale, la lumière pourrait suivre une trajectoire non géodésique! Au chapitre précédent nous avons montré l'impossibilité pour une particule matérielle de décrire une boucle temporelle de base.

Après avoir indiqué que de telles boucles n'imposaient pas de violation de causalité, nous avons ensuite examiné les objections physiques à une telle phénoménologie, d'une part sur des critères de validité des hypothèses pour que la Relativité générale soit applicable, sur la signification physique de cette phénoménologie et sur l'adéquation des paramètres utilisés impliqués dans ces boucles.

Nous avons évoqué des solutions faisant intervenir la QFT, mais sans aller très loin, faute d'une théorie unifiée restant à établir.

Cela fait un peu inventaire à la Prévert, trop d'arguments nuit à la défense de la cause. Il resterait à montrer que ces arguments ne sont en fait que des aspects ou conséquences d'un principe unique fondamental.

Nous pensons que la raison de ces problèmes est qu'on sort du cadre où les hypothèses de la relativité générale s'appliquent:

La coordonnée temps t n'est pas adéquate physiquement.

La machine temporelle étant déconnectée causalement de l'observateur extérieur, la représentation dans ces coordonnées, qui sont celles d'un observateur à l'infini positif, n'a pas de sens physique.

La relativité générale ne traite en réalité que des géodésiques, ceci étant en relation avec l'impossibilité pour une particule matérielle de décrire une boucle temporelle.

Veiller à ce que le concept de particule de test ne perturbant pas le champ soit respecté (dans l'exemple concret de la station spatiale, il ne l'est pas).

L'instabilité de certains éléments de la solution (horizon intérieur) fait que la moindre dissymétrie provoquée par une particule de test invalide la solution.

14-Causalité

1- Position du problème

Du fait de l'existence de singularités, de boucles temporelles, de la possibilité de « remonter » le temps, avec les violations flagrantes et non triviales de la « causalité » dans certaines solutions de la Relativité générale, dont certaines, comme l'exemple que nous étudions représentent l'état asymptotique de phénomènes physiques « non singuliers » (effondrement d'étoiles massives en rotation), on conçoit que si la définition de la violation de causalité non triviale est claire⁸³, la mise en œuvre des critères pour la caractériser, doit être délicate.

La structure causale est de nature « conforme »

On dit souvent que c'est la métrique qui fournit la structure causale⁸⁴. C'est vrai, mais il existe une condition plus faible (qui à une structure conforme) qui préserve la causalité d'un espace temps en Relativité générale.

En effet c'est la lumière qui joue le rôle structurel en causalité et les géodésiques lumière qui sont de type nul sont plus contraintes (trois degrés de liberté car il y a une contrainte sur le ds^2 qui est nul) que les lignes d'univers de type temps par exemple (4 degrés de liberté, le ds^2 est juste contraint à être positif en signature +, -, -, - ce qui correspond à une infinité de valeurs).

Ceci se traduit par le fait que localement les géodésiques lumière sont sur l'hypersurface d'un hypercône alors que les lignes d'univers sont dans l'hyperespace intérieur.

Une transformation conforme préservant les angles, les lignes d'univers orientées de type temps (causales, puisque sur ces lignes d'univers tout point correspondant à un événement peut influencer un point dans le futur sur cette ligne d'univers) à l'intérieur de l'hypercône sous tendu par son angle au sommet se retrouveront également à l'intérieur de l'hypercône et auront donc la même structure causale.

Donc, si on considère un espace topologique à quatre dimensions, sans métrique a priori, la classe des métriques Lorentziennes (s'il en existe) qui vont satisfaire à la causalité va être définie à un facteur conforme près (une fonction dépendant du point événement de cet espace temps).

Le tenseur de Weyl est un tenseur conforme qui caractérise le vide

On sait que c'est le tenseur de Riemann $R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}$ qui décrit la courbure en tout point d'un espace temps, donc caractérise cet espace temps. Dans le vide le tenseur de Riemann se ramène au tenseur de Weyl $C^{\rho}_{\sigma\mu\nu}$ qui est précisément un tenseur conforme, c'est-à-dire que si on calcule $C^{\rho}_{\sigma\mu\nu}$ pour une certaine métrique $g_{\mu\nu}$ et qu'on le calcule de nouveau pour une autre métrique donnée par $\omega(x) g_{\mu\nu}$ où $\omega(x)$ est une fonction arbitraire non nulle définie sur l'espace temps, on va trouver la même valeur.

On voit qu'on est amené naturellement à lier cette condition caractérisant la causalité au tenseur de Weyl qui est un tenseur « conforme », tout comme la relation minimum qui implique la causalité, du fait que la causalité découle d'une structure générique définie par un angle⁸⁵ : le cône de lumière.

La solution de Kerr est définie dans le vide.

Celle de Kerr Newman, a la même forme pour des raisons énoncées en annexe 1 §1B.

⁸³ Il y a violation de causalité en RG, si A et B étant deux points distincts quelconques de la variété, il existe des courbes orientées de type temps, reliant A et B, telles que sur certaines A est dans le futur de B et sur d'autres B dans le futur de A. Elle est non triviale, si cette condition reste valide dans tous les espaces de recouvrement.

⁸⁴ Voir [44] par exemple § 2.5

⁸⁵ Les transformations conformes conservent les angles.

Les cônes de lumière

Les géodésiques de type lumière, qui sont les traceurs des « cônes » de lumière jouent un rôle important dans l'analyse moderne de la théorie (c'est comme cela que Kerr a trouvé sa solution, par une étude systématique des géodésiques de type lumière).

En effet, ces géodésiques nulles tracent, en quelque sorte, le « squelette » de cet espace temps, les géodésiques de ce type étant confinées sur le « cône »⁸⁶ de lumière, alors que les géodésiques de type temps balaient l'intérieur du « cône ». Les géodésiques nulles ont une structure qui a moins de degrés de libertés, du fait d'une contrainte supplémentaire ($ds^2=0$).

Pour une géodésique de type temps, l'espace local de repos est de type « espace 3D » orthogonal à la géodésique, pour une géodésique de type lumière il se réduit à une surface 2D orthogonale à la géodésique nulle.

Les congruences de géodésiques nulles pour décrire la variété

Ceci apparaît clairement dans l'étude des congruences géodésiques⁸⁷, où pour les congruences de géodésiques nulles, il faut recourir à un artifice (choix d'un second vecteur auxiliaire nul) pour définir la tétrade. Rappelons que ces congruences sont une autre manière tout aussi valable (sinon plus) de décrire la variété que celle par la description de ses points (par les coordonnées)

Le formalisme de Newman Penrose

Le formalisme de Newman Penrose, systématise cette approche et nous avons vu qu'il supporte les symétries de cet espace temps, ce qui se traduit par l'expression la plus simple des différents tenseurs et équations de la Relativité générale dans ce formalisme.

Nous voyons que nous avons les ingrédients pour définir la causalité dans ce type d'espace temps. Reste à rendre opérationnelle cette réflexion et à trouver des critères concrets, objectifs et indépendant du système de coordonnées, de la violation ou non de causalité.

Comme l'indiquent M. Walker et Penrose dans [53] dans certains cas, (par exemple la structure conforme à l'infini) il suffit de connaître la structure conforme d'un espace temps $(M, g_{\mu\nu})$ décrit par une variété M et muni d'une métrique $g_{\mu\nu}$.

Dans ce cas, la connaissance de quatre intégrales premières des géodésiques de type lumière suffit. On dit que l'espace temps $(M, g_{\mu\nu})$ possède un tenseur conforme de Killing de valence m s'il existe sur M des tenseurs $K_{\mu_1 \dots \mu_m}$ et $k_{\mu_1 \dots \mu_{m-1}}$ tels que :

$$D(\mu K_{\mu_1 \dots \mu_m}) = k(\mu_{\mu_1 \dots \mu_{m-2}} g_{\mu_{m-1} \mu_m})$$

Où D symbolise l'opérateur de dérivée covariante.

Ceci est équivalent à la condition:

$$K_{\mu_1 \dots \mu_m} l^{\mu_1} \dots l^{\mu_m} = \text{constante}$$

le long des géodésiques de type lumière avec l^μ vecteur tangent qui se propage parallèlement le long de ces géodésiques.⁸⁸

En particulier pour $m=1$ nous avons $D(\mu A_\nu) = \varphi g_{\mu\nu}$ pour toute fonction scalaire φ et le vecteur de Killing conforme A^μ définit une symétrie conforme de $(M, g_{\mu\nu})$, de la même manière qu'un vecteur de Killing définit une isométrie de $(M, g_{\mu\nu})$.

⁸⁶ On parle de cône (surface 2D) car dans la représentation habituelle on supprime une coordonnée d'espace. En fait, il faudrait parler « d'hypercône » 3D, les géodésiques de type temps balayant elles l'espace temps 4D.

⁸⁷ Réf. [44] annexe F

⁸⁸ On voit que cette condition est moins forte que celle d'un vecteur de Killing, puisque pour ce dernier la relation est non seulement valable pour les géodésiques nulles mais pour toutes les géodésiques de type temps. $K_{\mu_1 \dots \mu_{m-1}} p^{\mu_1} \dots p^{\mu_m} = \text{constante}$, avec $p^\mu = \text{quadri impulsion}$ de la particule réelle ou du photon.

Par contre pour $m > 1$ une telle interprétation est plus délicate.

Walker et Penrose ont étudié l'extension de la propriété pour $m = 2$ (Tenseur de Killing conforme de valence 2).

Il se trouve que précisément la solution de Kerr Newman admet un tel tenseur de Killing conforme (ceci restant vrai même avec une constante cosmologique non nulle) ce qui implique l'existence d'une intégrale première quadratique du mouvement qui est indépendante de la métrique et des vecteurs de Killing de la métrique.

Avant d'entrer dans les détails, commençons par vérifier qu'il est possible en tout point de mettre la métrique sous la forme canonique « Lorentzienne ». Pour cela, vérifions que le déterminant de la métrique est toujours négatif.

2-Calcul du déterminant de la métrique

Nous avons montré au chapitre 9-6 qu'il est toujours négatif, en conformité avec la signature Lorentzienne de la métrique.

3- L'explication de B. Carter : Voir annexe 1 chapitre 2A et 2B :Causalité.

Commentaires sur l'extrait de l'article de B. Carter

B. Carter fait appel à deux critères pour traiter ce problème de causalité. Le premier est valide dans les régions I et II et montre que l'espace temps est régulier (pas de violation de causalité non triviale). Ce critère ne s'applique pas aux régions de type III, c'est-à-dire lorsque $r < r_+$ pour un trou noir de Kerr Newman où $m^2 > a^2 + e^2$ ou pour tout l'espace lorsque $m^2 < a^2 + e^2$. D'où la nécessité d'un deuxième critère.

L'exemple donné $\omega = t$ était évident, la métrique induite à 3 dimensions (r, θ, φ) (par $t = \text{constante}$) est immédiate à calculer, et on peut vérifier que dans le cas $m^2 > a^2 + e^2$, pour $r < r_+$ (zone III) elle est toujours de type espace, sauf pour la zone correspondant à la « Carter time machine » (éq.27 dans son article).

Elle n'est jamais partout de type espace (une seule zone de type III) dans le cas $m^2 < a^2 + e^2$, (on rappelle que $\Delta > 0$ dans la zone III).

Pour indiquer comme on peut faire pratiquement pour trouver le type des hypersurfaces dans le cas général de la forme linéaire $\omega = Kdt + Ld\varphi$, il faut trouver la métrique induite pour les hypersurfaces déterminées par $\omega = K.t + L.\varphi = \text{constante}$.

Explicitons le critère. S'il existe une forme linéaire remplissant le critère (les hypersurfaces déterminées par la forme linéaire, partout de type espace) alors comme les vecteurs ∂_t et ∂_φ sont des vecteurs de Killing, leur combinaison linéaire est aussi un vecteur de Killing qui caractérise une isométrie. La transition préserve la nature des hypersurfaces.

Une forme linéaire dans une variété définit une sous variété « intégrale »⁸⁹ du champ de vecteurs V^μ associé à la forme linéaire ω_μ par la relation $V^\mu \omega_\mu = 0$. Si la forme linéaire est le gradient d'une fonction f , cela implique que la sous variété est définie par une fonction constante des coordonnées sur la variété: $f = \text{constante}$.

La fonction f dont $\omega = Kdt + Ld\varphi$, est le gradient est $f = Kt + L\varphi + D = \text{constante}$

Ceci implique:

$$Kdt + Ld\varphi = 0 \text{ soit } dt = - (L/K)d\varphi = C.d\varphi \text{ avec } C = -L/K$$

Notre problème revient donc à chercher la métrique induite par cette relation.

$$ds^2 = -C^2(\Delta - a^2 \sin^2 \theta / \rho^2) d\varphi^2 + (2a.C \sin^2 \theta / \rho^2)(\Delta - (r^2 + a^2)) d\varphi^2 + (\rho^2 / \Delta) dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + (\sin^2 \theta / \rho^2) [(r^2 + a^2)^2 -$$

⁸⁹ Voir annexe C de [44], (le champ de vecteurs ainsi défini est tangent à la sous variété).

$$a^2 \Delta \sin^2 \theta] d\varphi^2$$

$$ds^2 = (\sin^2 \theta / \rho^2) \{ [(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta] - C^2 [(\Delta / \sin^2 \theta) - a^2] + 2a.C. [\Delta - (r^2 + a^2)] \} d\varphi^2 + (\rho^2 / \Delta) dr^2 + \rho^2 d\theta^2$$

$$ds^2 = (\sin^2 \theta / \rho^2) [(Ca - (r^2 + a^2))^2 - \Delta (a \sin \theta - C / \sin \theta)^2] d\varphi^2 + (\rho^2 / \Delta) dr^2 + \rho^2 d\theta^2$$

On voit qu'on a bien alors une métrique induite à 3 dimensions $(r; \theta, \varphi)$ dont on doit vérifier qu'elle ne peut pas être partout de type espace quel que soient L, K c'est-à-dire C .

Les coordonnées r et θ sont de type espace dans cette zone ($\Delta > 0$), la condition pour que la métrique induite (r, θ, φ) sur l'hypersurface soit de type espace est que:

$$(C.a - (r^2 + a^2))^2 - \Delta (a \sin \theta - C / \sin \theta)^2 > 0$$

Expression qui est bien équivalente à (27) lorsque $C = 0$, sauf que B. Carter prend la condition inverse.

Existe t'il un nombre C réel fini, tel que la relation soit toujours satisfaite ? Si oui alors il n'y a pas violation de causalité selon B. Carter.

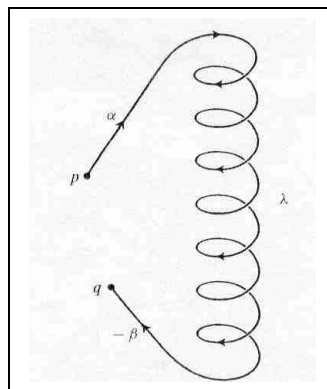
Etudions la dépendance par rapport à C . Si on dérive par rapport à C on obtient :

$$2[Ca^2 - a(r^2 + a^2)] - 2\Delta(C / \sin^2 \theta - a) = 2C(a^2 - \Delta / \sin^2 \theta) + 2a[\Delta - (r^2 + a^2)]$$

C'est l'équation d'une droite dont la pente s'inverse pour $(a^2 - \Delta / \sin^2 \theta) = 0$ soit $\Delta = a^2 \sin^2 \theta$, valeur pour laquelle la dérivée ne dépend pas de $C = -K/L$.

Autre valeur singulière pour $\theta = 0$.

Bien entendu, l'existence de cette zone critique de violation de causalité pollue toute la région sous l'horizon interne incluant tout l'espace négatif car il est possible de se rendre depuis n'importe quel point de cette région dans cette zone surcritique, de se constituer le « capital » gain de temps nécessaire et de repartir vers n'importe quel autre point, en naviguant autant que possible proche du cône de lumière pour ne pas « consommer » tout notre capital de coordonnée t acquis dans la machine temporelle (ce qui est assez acrobatique, et doit être assez consommateur en énergie, sachant qu'il n'y a pas forcément des géodésiques qui vont là où on veut aller). Voir figure ci dessous.



4- Généralités sur les structures causales:

Rappelons que la structure causale, liée aux cônes de lumière peut se définir par une structure moins forte que la métrique sur la variété (intermédiaire entre une topologie et une métrique).

5- Domaines de dépendance⁹⁰

On peut poser beaucoup de problèmes de physique en termes de problème des valeurs initiales : Etant donné un état du système à un moment donné quel va être cet état à un moment ultérieur. Le fait que ce problème ait une réponse définie est lié à la causalité, l'idée que les événements futurs doivent résulter de conditions initiales et des lois de la physique. Le problème des conditions initiales est classique aussi bien en physique Newtonienne qu'en relativité, cependant la nature dynamique de l'espace temps en relativité générale peut introduire de nouvelles conditions qui peuvent invalider cette formulation en termes de valeurs initiales. Examinons quelques un des concepts utilisés pour comprendre comment la causalité opère en relativité générale.

Nous allons nous intéresser à l'évolution des champs de matière dans un espace temps fixe, plutôt qu'à l'évolution de la métrique elle-même. Notre principe de base est que rien ne peut voyager plus vite que la lumière, en conséquence l'information va s'écouler sur les trajectoires de type temps ou lumière (pas nécessairement des géodésiques). Comme il est parfois utile de distinguer entre les chemins purement de type temps et ceux qui ne sont pas de type espace, nous définissons comme causale une courbe qui est partout de type temps ou nulle.

Etant donné un sous ensemble quelconque S d'une variété M , nous définissons le futur causal de S , dénoté $J_+(S)$ comme l'ensemble des points qui peuvent être atteints à partir de S en suivant une courbe causale orientée vers le futur, le futur chronologique $I_+(S)$ est l'ensemble des points qui peuvent être atteints par une courbe chronale de type temps orientée vers le futur.

Remarquons qu'une courbe de longueur nulle est causale mais pas chronale, donc un point p sera toujours dans son propre futur causal $J_+(p)$ mais pas nécessairement dans son propre futur chronal $I_+(p)$ (bien que ce soit possible comme nous l'indiquons ci après). Le passé causal J_- et chronal I_- donc définis de manière similaire.

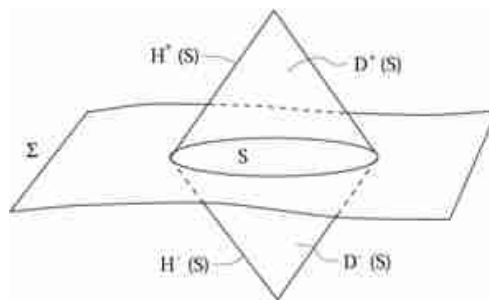
Un sous ensemble S de M est dit achronal, s'il n'existe pas de courbe de type temps reliant deux points quelconques de S . Par exemple toute hypersurface sans bords de type espace dans un espace de Minkowski est achronale.

Etant donné un ensemble fermé achronal S , nous définissons le domaine de dépendance du futur de S , noté $D^+(S)$, comme l'ensemble des points p tels que toutes les courbes infinies correspondant à un chemin vers le passé à partir de p coupent S .

Interprétons cette définition de façon à ce que S lui même soit un sous ensemble de $D^+(S)$.

De même définissons le domaine de dépendance du passé $D^-(S)$ de la même manière, mais en remplaçant chemin vers le passé par chemin vers le futur

Généralement certains points de M vont être dans un des domaines de dépendances et d'autres n'y seront pas. Définissons la frontière de $D^+(S)$ comme horizon de Cauchy du futur $H^+(S)$, et de même la frontière de $D^-(S)$ comme l'horizon de Cauchy du passé $H^-(S)$. Vous pouvez vous convaincre que les deux sont des surfaces nulles.



L'utilité de ces définitions saute aux yeux, comme rien ne va plus vite que la lumière, les signaux ne peuvent pas se propager à l'extérieur du cône de lumière associé à p . Donc si chaque courbe qui reste à l'intérieur du cône coupe S , alors l'information spécifiée sur S sera suffisante pour prédire quelle sera la

⁹⁰ Cette partie est fortement inspirée de [44] p 79-81

situation à p (Les données initiales du champ de matière de S peuvent être utilisées pour calculer la valeur des champs en p)

L'ensemble des points pour lesquels on peut prédire l'état, en connaissant celui de S est simplement l'union $D^+(S) \cup D^-(S)$.

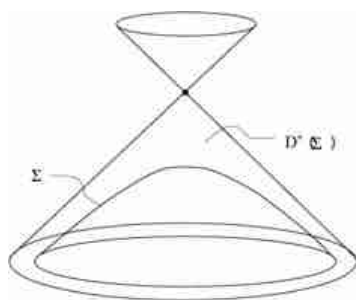
On peut facilement étendre ces idées développées pour le sous ensemble S à l'hypersurface Σ dans son intégralité.

Le point important est que $D^+(\Sigma) \cup D^-(\Sigma)$ peut ne pas être M dans son intégralité, même si Σ lui-même semble être une hypersurface bien honnête s'étendant à travers l'espace.

6- Difficultés qu'on peut rencontrer

Cela peut arriver de bien des façons. L'une d'entre elle est de choisir une "mauvaise hypersurface", encore qu'il soit difficile de dire quand une hypersurface est mauvaise pour cet usage.

Considérons l'espace de Minkowski et une hypersurface de type espace Σ qui reste dans le passé du cône de lumière d'un certain point.

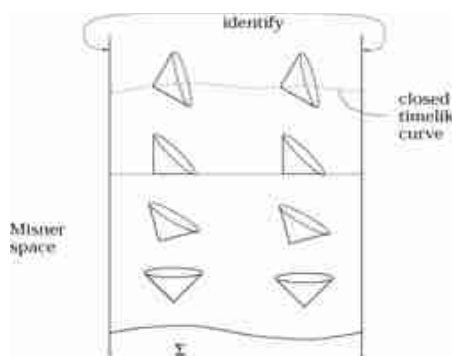


Dans ce cas Σ est une bonne surface de type espace, mais il est clair que $D^+(\Sigma)$ s'arrête au cône de lumière, et qu'on ne peut pas utiliser l'information sur Σ pour prédire ce qui se passe dans l'espace de Minkowski.

Naturellement, nous aurions pu prendre d'autres hypersurfaces dont le domaine de dépendance aurait été la variété en entier.

7- Espace de Misner

Un exemple moins trivial est l'espace de Misner. C'est un espace bi dimensionnel avec la topologie $\mathbb{R}^1 \times S^1$, et une métrique pour laquelle le cône de lumière s'incline progressivement au fur et à mesure qu'on avance dans le temps.

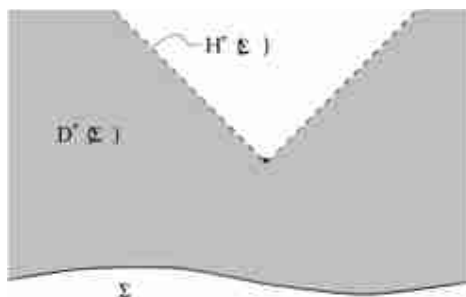


Passé un certain point, il est possible de voyager sur des trajectoires de type temps qui s'enroulent autour de S^1 et se referment sur elles mêmes. On les appelle des boucles temporelles. Si nous avons spécifié une surface Σ dans le passé de ce point, alors aucun des points de la région contenant des boucles temporelles n'est dans le domaine de dépendance de Σ , puisque les boucles temporelles ne coupent pas Σ . C'est assurément un problème plus sérieux que le précédent, puisqu'il ne semble pas exister dans ce type d'espace temps de solution au problème de prédiction de l'évolution en partant de valeurs initiales

bien définies. (A vrai dire les problèmes de ce type sont toujours en investigation, donc je ne dirai pas que cette énigme est réglée).

8- Singularités

Le dernier exemple est fourni par l'existence de singularités, points qui ne sont pas dans la Variété, bien qu'ils puissent être atteints en voyageant sur une géodésique sur une distance finie. Typiquement, elles apparaissent quand la courbure devient infinie en un point, si cela arrive, le point ne peut plus être considéré comme appartenant à l'espace-temps. Une telle occurrence peut mener à l'émergence d'un horizon de Cauchy, un point p qui est dans le futur de la singularité ne peut pas être dans le domaine de dépendance d'une hypersurface qui est dans le passé de la singularité, car il y aura des courbes passant par p qui se terminent à la singularité.



Tous ces obstacles peuvent aussi se produire dans le problème des valeurs initiales en Relativité Générale, quand on essaie de faire évoluer la métrique elle-même depuis des valeurs initiales.

9- Synthèse des difficultés.

La possibilité de prendre une mauvaise hypersurface n'est pas fréquente, d'autant que la plupart des solutions sont trouvées globalement (en résolvant l'équation d'Einstein pour tout l'espace temps). Il faut être attentif en cas de résolution numérique de l'équation d'Einstein où un mauvais choix d'hypersurface peut conduire à des calculs inextricables même si en principe une solution complète existe.

La Relativité générale s'efforce d'éviter les boucles temporelles, il y a des solutions qui les incluent, mais peuvent-elles résulter d'une évolution à partir de données initiales régulières ?

Les singularités sont par contre incontournables. Le simple fait que la gravitation soit toujours attractive génère une concentration de matière, augmentant la courbure et qui peut dégénérer en une singularité.

Il faut apprendre à vivre avec, bien que on puisse espérer qu'une théorie quantique de la gravitation bien définie pourra éliminer les singularités de la Relativité Générale "classique"

10- Invariants scalaires des espaces temps.

Dans la recherche de critères permettant de détecter des anomalies causales et des singularités, si on veut obtenir des critères indépendants des coordonnées, on peut par exemple étudier les propriétés de scalaires construits sur les éléments qui décrivent l'espace temps.

C'est la démarche entreprise dans [49] où on utilise des invariants de ces espaces temps construits sur le tenseur de Weyl, de Riemann, comme les scalaires, K_1 , K_2 , K_3 de Kretschmann, Chern-Pontryagin et Euler dans le vide, par exemple pour délimiter des zones déterminées par le signe de ces scalaires.

On évalue le caractère dominant des effets soit gravito électriques, soit gravito magnétiques, qui pourrait fournir un critère sur l'existence de singularités.

On est limité par le fait que ces scalaires résultant de contractions multiples de tenseurs, seule une partie de l'information portée par ces tenseurs se retrouve dans les scalaires, ce qui réduit les conclusions qu'on peut tirer.

Malgré tout cette approche récente mérite d'être suivie: Voir figure 5 ci-dessous extraite de cet article.

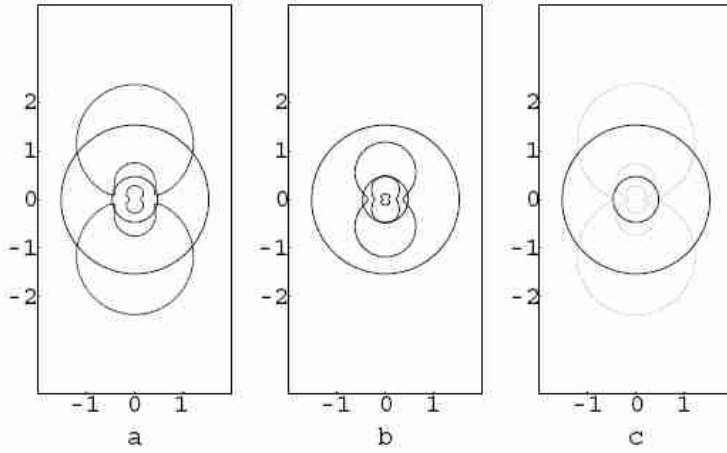


Fig. 5. Kerr-Newman Black Hole with parameters $M = 1$, $a = 0.6$, $Q = 0.6$. Dashed lines in Fig. 5a correspond to $K_1 = 0$, thin solid lines in Fig. 5b to $K_2 = 0$, grey solid lines in Fig. 5c to $K_3 = 0$ and thick solid lines are the inner/outer horizons.

11- Géodésiques dans la machine temporelle.

Existe-t-il des géodésiques dans la machine temporelle?

Avec les équations du mouvement :

$$\begin{aligned}
 \rho^2 d\theta/d\lambda &= \sqrt{\Theta}, \\
 \rho^2 dr/d\lambda &= \sqrt{R}, \\
 \rho^2 d\phi/d\lambda &= -(aE - L_z/\sin^2\theta) + (a/\Delta)P, \\
 \rho^2 dt/d\lambda &= -a(aE \sin^2\theta - L_z) + (r^2 + a^2)\Delta^{-1}P. \\
 \Theta &= \mathcal{Q} - \cos^2\theta [a^2(\mu^2 - E^2) + L_z^2/\sin^2\theta], \\
 P &= E(r^2 + a^2) - L_z a - eQr, \\
 R &= P^2 - \Delta[\mu^2 r^2 + (L_z - aE)^2 + \mathcal{Q}]. \\
 \mathcal{Q} &= p_\theta^2 + \cos^2\theta [a^2(\mu^2 - E^2) + \sin^{-2}\theta L_z^2], \quad \mathcal{H} \equiv \mathcal{Q} + (L_z - aE)^2, \quad \mathcal{Q} = p_\theta^2 + \cos^2\theta [a^2(\mu^2 - E^2) + \sin^{-2}\theta L_z^2].
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

On peut raisonnablement se poser cette question à priori, car du fait de la racine carrée dans la forme des équations trouvées par B. Carter, il faut que les fonctions $\Theta(\theta)$ et $R(r)$ soient positives, ce qui implique des contraintes vis-à-vis des paramètres intervenant dans ces fonctions.

La dépendance de θ de la géodésique est assez simple à analyser⁹¹ (elle ne dépend que de peu de paramètres, en particulier, pas de la masse, ni de la charge du trou noir ou de la particule de test). La phénoménologie est liée au signe de la constante « $\mathcal{K}$ » constitué à partir de la constante de Carter, du spin du trou noir et du moment cinétique et de l'énergie de la particule, citée dans les équations ci-dessus. De nouveau, on voit comment les paramètres significatifs de la solution, font intervenir de façon imbriquée et indissociables ces différents paramètres.

Par contre la dépendance en « r », relevant d'une équation du quatrième degré complète, est beaucoup plus complexe. Il faut donc étudier le signe des racines d'une équation du quatrième degré, problème qui a une solution analytique, mais est en général assez lourd à traiter.

La constante de Carter joue un rôle crucial du fait qu'elle intervient linéairement dans la fonction alors que le moment cinétique orbital L_z qui est un autre paramètre fondamental qui détermine le type des orbites intervient quadratiquement. Pour illustrer cela on trace des diagrammes $L_z - r$ pour différentes valeurs caractéristiques de la constante $\mathcal{K}$, liée à la constante de Carter⁹².

⁹¹ Cela est fait de façon très synthétique dans [7] chapitre-3c

⁹² Ce point est traité en détail dans [38] chapitre 4

12- Congruences principales nulles.

A titre d'illustration regardons l'allure des possibilités dans le plan équatorial pour des géodésiques nulles. Ici $\lambda = L/E$ est le paramètre d'impact⁹³. Sur une géodésique nulle (le temps propre est nul), L et E changent par le même facteur constant quand on reparamètre la géodésique.

Examinons par exemple le cas de la congruence des directions principales nulles qui sont censées remplir toute la variété. Elles satisfont aux équations (1) avec les conditions :

$$k^0 = 0, k^r = \pm E, k^\theta = aE/\Delta, k^\lambda = (r^2 + a^2)E/\Delta \quad L_z = a.E.\sin^2\theta \quad (E \text{ est l'énergie à l'infini}), \text{ et } \mathcal{K} = -a^2 E^2 \cos^2\theta.$$

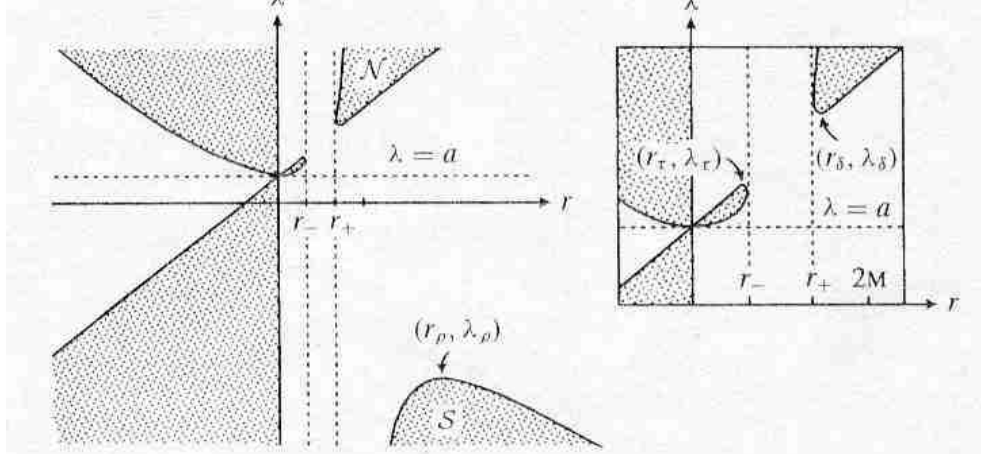


FIGURE 4.26. The r - λ plot for equatorial null geodesics. As usual, forbidden regions ($R = r/\psi < 0$) are shaded. The inset shows a neighborhood of the tongue. The L -axis $r = 0$ represents the ring singularity, which severs Eq^- from Eq^+ . Compare Fig. 8 of Boyer, Lindquist (1967).

Les équations se résolvent très simplement dans ce cas, et on obtient la solution⁹⁴:

$$\theta = cte, \quad r = \pm E.\lambda, \quad \varphi = aE.\lambda/\Delta, \quad t = (r^2 + a^2)E.\lambda/\Delta$$

On retrouve bien les composantes du vecteur principal nul:

$$\begin{aligned} l^\mu &= \frac{1}{\Delta} (r^2 + a^2, \Delta, 0, a) \\ n^\mu &= \frac{1}{2\rho^2} (r^2 + a^2, -\Delta, 0, a) \end{aligned}$$

à un facteur $1/E$ de normalisation près pour l et $2\rho^2/E\Delta$ pour n , pour satisfaire la condition de normalisation $l^\mu n_\mu = -1$.

Pour vérifier de la complétude des géodésiques, utilisons la forme développée de $R(r)$.

$$\begin{aligned} R = & (E^2 - \mu^2)r^4 + 2(\mu^2 m + e\epsilon E)r^3 \\ & + [a^2 E^2 - \Phi^2 + \epsilon^2(\epsilon^2 - \mu^2) - a^2 \mu^2 - Q]r^2 \\ & + 2[m(aE - \Phi)^2 + e\epsilon a(aE - \Phi) + mQ]r \\ & - e^2(aE - \Phi)^2 - (a^2 + \epsilon^2)Q. \end{aligned}$$

Avec: $Q = \mathcal{K} - (\Phi - aE)^2$.

⁹³ Attention à la notation, λ est en général utilisé pour désigner le paramètre affine sur une trajectoire de type temps

⁹⁴ Ici, λ , reprend sa convention habituelle de paramètre affine de la courbe.

Il est facile de voir que pour $r = 0$, (pour que la géodésique atteigne l'anti univers en passant à travers l'anneau) le paramètre Q doit être négatif, ce qui est bien le cas ici, car $\mathcal{K} < 0$. Ces conditions peuvent elles être satisfaites dans cette zone ?

Ici $d\varphi/dt = a/(r^2+a^2)$. Nous avons vu que la valeur était infinie sur la surface de la machine temporelle pour un photon tangentiel même en contre rotation, mais comme ici il s'agit de photon radial, ceci ne s'applique pas.

Comme nous avons ci-dessus un diagramme (fig. 4.26) pour les géodésiques nulles dans le plan équatorial, évaluons $\lambda = L/E$. Il vaut $a.E.\sin^2\theta/E = a.\sin^2\theta = a$ pour le plan équatorial.

D'après le diagramme pour cette valeur, toutes les valeurs de r sont possibles, c'est d'ailleurs le seul cas, mais on doit passer par un point triple de limites de régions interdites, donc le cas doit être « dégénéré », en fait on percute la singularité. Cela ne nous éclaire donc pas.

Dans [7] B. Carter a montré la complétude des géodésiques (sauf dans le plan équatorial où elles peuvent heurter la singularité, comme on vient de le voir).

Cela montre bien que les géodésiques nulles pénètrent bien dans la zone où la causalité peut être violée, mais comme elles y pénètrent « radialement », la trajectoire est causalement régulière.

15-Représentations dans une base locale de vecteurs.

C'est en fait un retour aux sources puisque dans son article fondateur de 1963 la première équation qu'on trouve ($ds^2 = 2\tau\tau^* + 2mk$) est celle d'une base locale de vecteurs nuls. Il ne faut donc pas s'étonner de l'importance de cette représentation dans la solution de Kerr.

A- Base formée par les vecteurs canoniques V, W

Introduction :

On qualifie la solution de Kerr de solution pour les trous noirs en rotation. Rotation qui est « paradoxale » en Relativité Générale du fait qu'il n'existe pas de référentiel fixe absolu: Rotation par rapport à quoi ?

La nature « obloïde » du système de coordonnées de Boyer Lindquist suggère qu'on peut assimiler cette propriété à une rotation⁹⁵.

Comme tout système de coordonnées, il est arbitraire et n'a pour fonction que de permettre un étiquetage complet et non ambigu des points de la variété.

On sait que dans les coordonnées de Boyer Lindquist (BL) les géodésiques subissent un effet d'entraînement en rotation, effet qui dépend de la distance à la singularité.

De ce point de vue ce système de coordonnées caractérise bien le phénomène physique, mais il n'en rend pas nécessairement compte de la manière la plus complète.

Nous avons déjà noté, aux chapitres 6 & 8, le caractère non inertiel de ce système de coordonnées, en particulier le couplage entre l'énergie et le moment angulaire.

Ce couplage nous incite à remplacer les vecteurs de Killing associés aux coordonnées t et φ (dont la métrique ne dépend pas et qui sont associés à l'énergie et au moment cinétique), par les vecteurs canoniques V et W , construits sur ces vecteurs de Killing de sorte à incorporer le couplage entre ces deux grandeurs et mieux refléter les caractéristiques inertielles⁹⁶.

Sous réserve que l'intégration analytique soit possible, les nouvelles coordonnées globales seraient les courbes intégrales de ces champs de vecteurs.

A partir des tétrades, on peut calculer une forme « métrique locale » intégrable dans un sous espace à r et θ constants⁹⁷, (cette « métrique » prend une forme diagonale dans cette nouvelle base) .

1-Définition des vecteurs canoniques V, W

Quelques rappels: Les champs de vecteurs canoniques (V, W) avec $\langle V, W \rangle = 0$, en métrique de Kerr sont :

$$W = a.\sin^2\theta \partial_t + \partial_\varphi : \text{ (Ce champ de vecteurs est toujours de type espace)} \quad (15-1-1)$$

⁹⁵ L'article original de Kerr fait référence à une rotation (spinning mass), qu'il introduit par une comparaison au comportement asymptotique de l'effet d'une rotation en métrique asymptotiquement plate.

⁹⁶ Voir [40]. Certains calculs du chapitre ont repris de cet ouvrage.

⁹⁷ La tétrade est la matrice inversible e_{μ}^a telle que $\hat{e}_{(\mu)} = e_{\mu}^a \hat{e}_{(a)}$. La base est bien entendu valide dans toute la variété, par contre elle n'est pas forcément analytiquement intégrable en termes de coordonnées globales. Ce qui est souligné c'est le caractère analytiquement intégrable des coordonnées v, w courbes intégrales de V, W dans le plan à r et θ constants.

$V = (r^2+a^2) \partial_t + a\partial_\phi$: (Ce champ de vecteur change de signe en même temps que ∂_r) (15-1-2)

$$\langle V, \partial_\phi \rangle = -\Delta a \sin^2\theta \quad (R5)$$

$$\langle V, \partial_t \rangle = \Delta \quad (R6)$$

$$\langle W, \partial_\phi \rangle = -(r^2+a^2)\sin^2\theta \quad (R7)$$

$$\langle W, \partial_t \rangle = a \sin^2\theta \quad (R8)$$

$$\langle V, V \rangle = \Delta \rho^2$$

$$\langle W, W \rangle = -\rho^2 \sin^2\theta$$

$$\langle V, \partial_r \rangle = 0, \langle V, \partial_\theta \rangle = 0, \langle W, \partial_r \rangle = 0, \langle W, \partial_\theta \rangle = 0$$

Montrons que $\langle V, V \rangle = \Delta \rho^2$.

$$\begin{aligned} \langle V, V \rangle &= \langle V, (r^2+a^2) \partial_t + a\partial_\phi \rangle = (r^2+a^2)\langle V, \partial_t \rangle + a\langle V, \partial_\phi \rangle = (r^2+a^2)(\Delta) + a(\Delta a \sin^2\theta) = \Delta \\ &= (r^2+a^2 - a^2 \sin^2\theta) = \Delta \rho^2 \end{aligned}$$

On pourrait faire le même genre de calcul pour $\langle W, W \rangle$

2- Représentation graphique

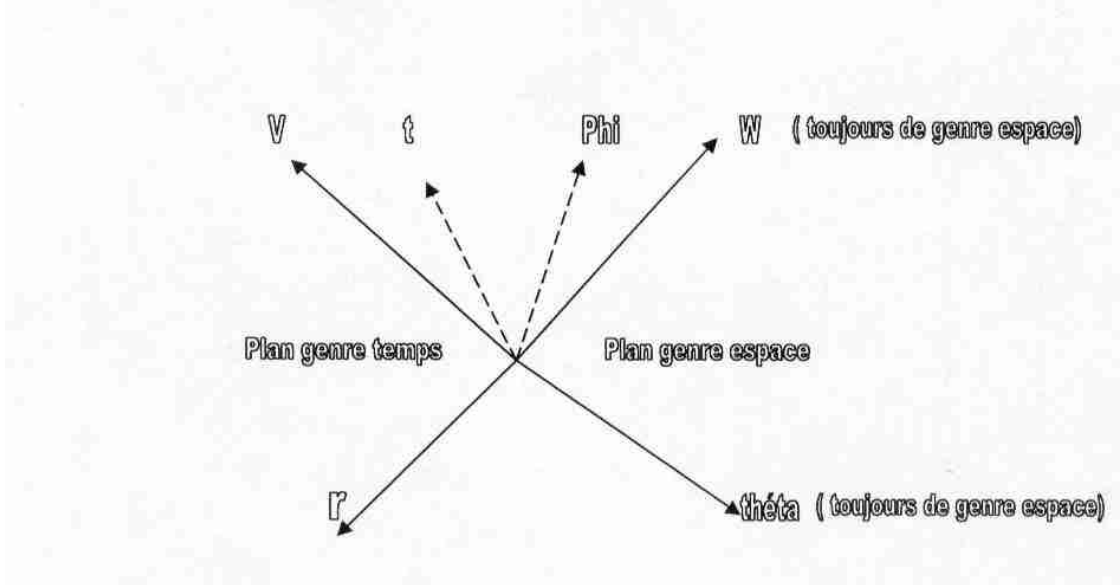


Figure 15 A-1: Les champs de vecteurs V , W , ∂_r , ∂_θ , sont mutuellement orthogonaux. Le plan P généré par le balayage des vecteurs $[V, \partial_r]$ est toujours de genre temps, alors que celui perpendiculaire généré par $[W, \partial_\theta]$ est toujours de genre espace. Le champ de vecteurs V, W balaye le même plan que celui balayé par $\partial_t, \partial_\phi$. A noter que W et ∂_ϕ s'annulent, (mais restent de genre espace), sur l'axe ($\theta = 0$ ou π).

Nous avons défini une base locale canonique $v^a = (V, W, \partial_t, \partial_\phi)$ en remplaçant seulement les 2 vecteurs de base $\partial_t, \partial_\phi$ par V, W (on a redéfini les coordonnées dans le « plan » $\partial_t, \partial_\phi$). Cette base est orthogonale, à la différence de la base de vecteurs d'origine où $\partial_t, \partial_\phi$ n'étaient pas orthogonaux.

Nous avons utilisé (par anticipation) cette base orthogonale pour montrer comment les vecteurs $\partial_t, \partial_\phi$ tournent et varient en module en fonction de r , en particulier dans la machine temporelle, ce qui permet d'illustrer comment la coordonnée temps sur la trajectoire de type temps de l'observateur peut décroître dans les coordonnées globales.

Cette base est bien adaptée à des lignes d'univers à r et θ constants, comme celles des boucles temporelles et trajectoires critiques « remontant le temps » car ces vecteurs V et W sont orthogonaux aux vecteurs de base dérivés des coordonnées de Boyer Lindquist ∂_r et ∂_θ .

La forme de Boyer Lindquist nous a révélé la stationnarité et la symétrie axiale de la solution de Kerr et ses vecteurs de Killing associés. Cette tétrade canonique va nous révéler la symétrie cachée de la métrique de Kerr. A ce titre elle doit nous révéler d'autres aspects complémentaires plus profonds de cette solution. On appelle tétrades e^a_μ les composantes des vecteurs de base $(\partial_\mu)^\nu$ qu'on note plus simplement ∂_μ de la métrique de Boyer Lindquist, dans cette base locale, soit:

$$\hat{e}_\mu = (\partial_\mu)^\nu = e^a_\mu \hat{e}_{(a)}$$

la métrique peut s'écrire:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{ab} e^a_\mu e^b_\nu dx^\mu dx^\nu$$

3- Définition d'une métrique en coordonnées $(v, w, \text{ avec } r, \theta \text{ constants})$

Considérons dans la métrique définie en coordonnées de Boyer Lindquist (t, r, θ, φ) les surfaces (2D) à (r, θ) constants.

Les points de la variété, représentant l'espace temps, sont repérés sur ces surfaces par les coordonnées t, φ .

Ces coordonnées définissent deux champs de vecteurs $\partial_t, \partial_\varphi$ (de Killing dans cette forme de la métrique) qui sont les vecteurs tangents à ces coordonnées.

Réciproquement les coordonnées sont les courbes intégrales à ces champs de vecteurs. Remarquons que les vecteurs $\partial_r, \partial_\theta$ sont orthogonaux à cette surface (pas de produits croisés de $\partial_t, \partial_\varphi$ avec $\partial_r, \partial_\theta$).

Sur cette même surface à (r, θ) constants, faisons un changement de coordonnées en procédant de la manière suivante:

Soit les champs de vecteurs V et W définis précédemment :

$$\begin{aligned} V &= (r^2 + a^2) \partial_t + a \partial_\varphi : \\ W &= a \sin^2 \theta \partial_t + \partial_\varphi \end{aligned}$$

Par construction, en tout point de la surface (2D) à (r, θ) constants, ces vecteurs V, W , combinaisons linéaires de $\partial_t, \partial_\varphi$ appartiennent au même plan tangent à la surface que les vecteurs $\partial_t, \partial_\varphi$.

Si on considère les courbes intégrales à V, W et qu'on les définit comme nouvelles coordonnées v, w alors $V = \partial_v, W = \partial_w$.

Ces nouvelles coordonnées vont balayer toute la surface 2D précédemment balayée par $\partial_t, \partial_\varphi$. En chaque point les coordonnées t et φ , dans leur limite permise (de $-\infty$ à $+\infty$ pour t et de 0 à 2π pour φ), définissent $\partial_t, \partial_\varphi$ et donc $V = \partial_v$, et $W = \partial_w$ c'est-à-dire v et w .

Nous disposons donc avec (v, r, θ, w) d'un autre système de coordonnées qui définit, aussi bien que le précédent, la même variété. Les coordonnées associées aux vecteurs V et W n'ont pas ce caractère périodique du fait de la présence de t . Nous indiquerons plus loin le mapping associé entre les systèmes de coordonnées.

4- Forme de la métrique dans les coordonnées associées à ces vecteurs (v, w, r, θ) .

La méthode proposée va donner un résultat qu'on peut dériver d'une des formes de la métrique de Boyer Lindquist:

$$ds^2 = (\Delta/\rho^2)(dt - a.\sin^2\theta.d\phi)^2 - (\sin^2\theta/\rho^2)(a.dt - (r^2+a^2).d\phi)^2 - (\rho^2/\Delta)dr^2 - \rho^2.d\theta^2$$

et de la forme générique:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{ab} e^a_\mu e^b_\nu dx^\mu dx^\nu \quad \text{donc} \quad g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e^a_\mu e^b_\nu$$

par identification de:

$$\begin{aligned} (\Delta/\rho^2)^{1/2}(dt - a.\sin^2\theta.d\phi) &= (\Delta/\rho^2)^{1/2}dv = e^0_\mu dx^\mu \rightarrow e^0_\mu = (\Delta/\rho^2)^{1/2}(1, 0, 0, -a.\sin^2\theta) \\ (\rho^2/\Delta)^{1/2}dr &= e^1_\mu dx^\mu \rightarrow e^1_\mu = (\rho^2/\Delta)^{1/2}(0, 1, 0, 0) \\ \rho.d\theta &= e^2_\mu dx^\mu \rightarrow e^2_\mu = \rho(0, 0, 1, 0) \\ (\sin\theta/\rho)(a.dt - (r^2+a^2).d\phi) &= \rho \sin\theta.dw = e^3_\mu dx^\mu \rightarrow e^3_\mu = (\sin\theta/\rho)(a, 0, 0, r^2+a^2) \end{aligned}$$

dans base locale tétradratique canonique $e^a = (V, \partial_r, \partial_\theta, W)$, définie par les tétrades e^a_μ , en coordonnées de Boyer Lindquist (t, r, θ, ϕ) .

Cela est justifié ci dessous de façon plus formelle. A partir de:

$$\begin{aligned} V &= \partial_v = (r^2+a^2) \partial_t + a\partial_\phi \\ W &= \partial_w = a.\sin^2\theta \partial_t + \partial_\phi, \end{aligned}$$

la relation étant donnée entre les vecteurs de base (dans l'espace tangent) des nouvelles coordonnées par rapport aux anciennes (vecteurs de base tangents aux courbes de coordonnées), il est naturel de l'exploiter directement. La forme bilinéaire qui fait intervenir ces vecteurs est la métrique inverse, donc calculons la métrique inverse exprimée dans le champ de vecteurs des coordonnées originales, utilisons la relation vectorielle (en l'inversant) pour obtenir la métrique inverse dans la nouvelle base et inversons la métrique pour obtenir la forme covariante de la métrique.

La métrique inverse en coordonnées Boyer Lindquist (t, r, θ, ϕ) et signature $(+ - - -)$ vaut :

$$g^{00}(\partial/\partial t)^2 + g^{03}(\partial/\partial t)(\partial/\partial \phi) + g^{30}(\partial/\partial \phi)(\partial/\partial t) - (\Delta/\rho^2).(\partial/\partial r)^2 - (1/\rho^2)(\partial/\partial \theta)^2 + g^{33}(\partial/\partial \phi)^2$$

en reportant:

$$\begin{aligned} \partial_t &= (\partial_v - a.\partial_w)/\rho^2 \\ \partial_\phi &= [(r^2+a^2)\partial_w - a.\sin^2\theta \partial_v]/\rho^2 \end{aligned}$$

dans la métrique inverse de Boyer Lindquist, on obtient:

$$\begin{aligned} &g^{00}[(\partial_v - a.\partial_w)/\rho^2]^2 + g^{03}\{(\partial_v - a.\partial_w)/\rho^2\}\{[(r^2+a^2)\partial_w - a.\sin^2\theta \partial_v]/\rho^2\} + g^{30}\{[(\partial_v - a.\partial_w)/\rho^2]\{[(r^2+a^2)\partial_w - a.\sin^2\theta \partial_v]/\rho^2\} - (\Delta/\rho^2).(\partial/\partial r)^2 - (1/\rho^2)(\partial/\partial \theta)^2 + g^{33}\{[(r^2+a^2)\partial_w - a.\sin^2\theta \partial_v]/\rho^2\}^2 \\ &= (\partial_v)^2 \{(g^{00} - 2.g^{03}.a.\sin^2\theta + g^{33}.a^2.\sin^4\theta)/(\rho^4)\} + (\partial_w)^2 \{(g^{00}.a^2 - 2g^{03}.(r^2+a^2).a + g^{33}.(r^2+a^2)^2)/\rho^4\} + \\ &\partial_w \partial_v \{[-2.a.g^{00} + 2.g^{03}(r^2+a^2 + a^2\sin^2\theta) - 2(r^2+a^2).a.\sin^2\theta g^{33}]/\rho^4\} - (\Delta/\rho^2).(\partial/\partial r)^2 - (1/\rho^2)(\partial/\partial \theta)^2 + \\ &\{[(r^2+a^2)\partial_w - \partial_v]/\rho^2\}^2 \end{aligned}$$

On développe et simplifie, on obtient la nouvelle métrique inverse. On peut alors calculer la métrique covariante dans les nouvelles coordonnées par la relation : $g^{\mu\alpha}.g_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu$ ⁹⁸ : Cela donne :

$$ds^2 = \rho^2(\Delta.dv^2 - \Delta^{-1}dr^2 - d\theta^2 - \sin^2\theta.dw^2) \quad (15-4-1-1)$$

⁹⁸ J'ai réalisé ces opérations (pénibles) en utilisant Mathématique 4

Notons que nous avons établi cette forme localement et qu'il ne faut pas en déduire que des coordonnées v et w qui interviennent dans cette formule (15-4-1-1) sont des coordonnées globales, car nous n'avons pas procédé à leur intégration⁹⁹.

Toutefois nous pouvons remarquer que cette forme de la métrique est valide dans le sous espace (2D) à t et θ constants (le changement de coordonnées est alors linéaire et l'intégration « triviale »).

Mapping entre les coordonnées v, w et θ, r .

Ci dessous nous représentons le mapping (dans le sous espace 2D) entre la version périodique de t, φ et v, w , en tenant compte que les régions modulo 2π doivent être identifiées.

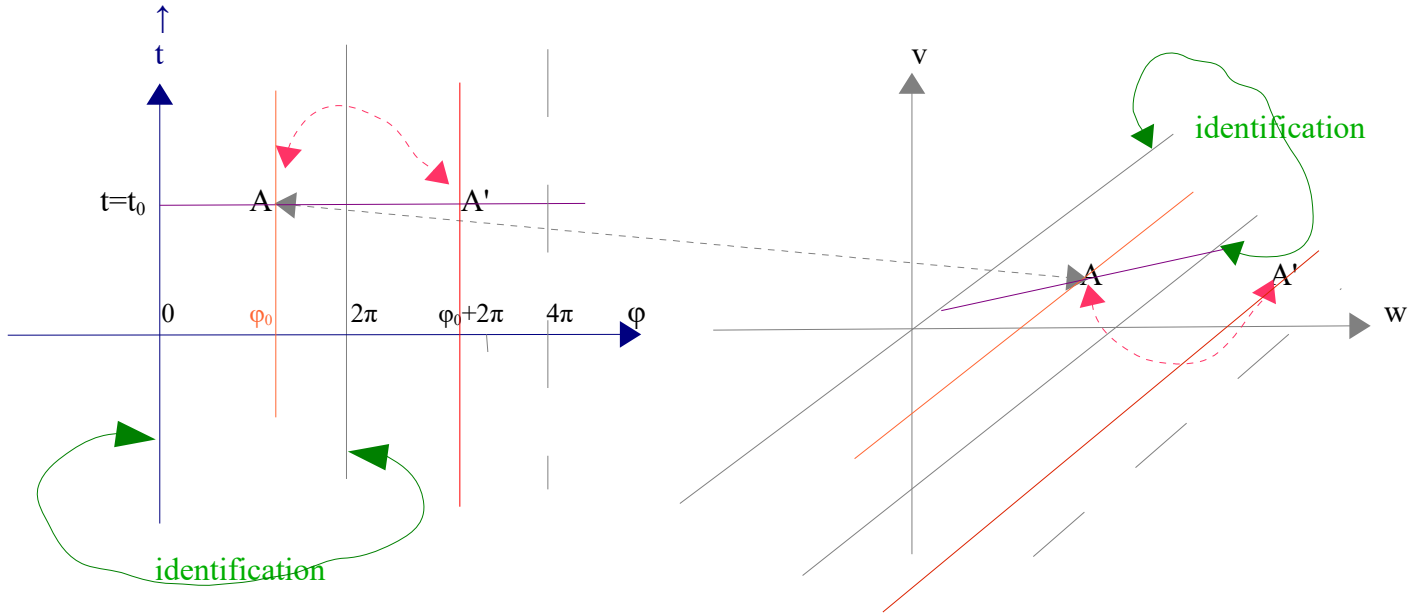


Figure 15-A-2a: Représentation du sous espace à θ et r constants en coordonnées (t, φ) à gauche et (v, w) à droite. Mapping entre les deux représentations. Le point A' doit être identifié à A , de même que toutes les images de A modulo 2π .

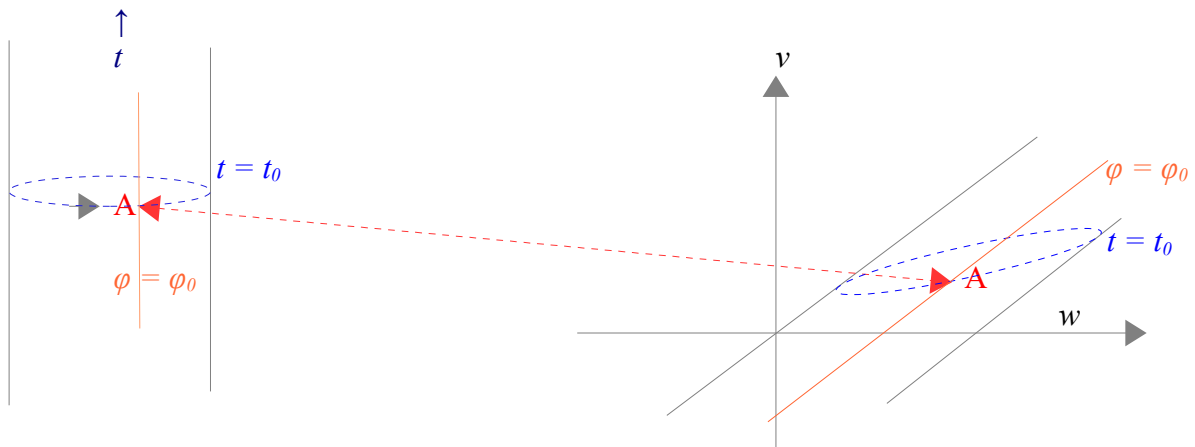


Fig.15-A-2b. (Fig.15-A-1a, « compacifiée »). Sur la figure de droite, on retrouve la droite (rouge) passant par A , à $\varphi = \varphi_0$, oblique de pente $1/a$, en coordonnées v, w et le cercle pointillé en bleu à $t = t_0$, dont l'inclinaison égale à $a \cdot \sin^2 \theta / (r^2 + a^2)$ dépend de a, θ et r avec $a = 1, \theta = \pi/2, r = 1$. On rappelle que θ et r sont constants sur ces figures.

⁹⁹ Voir §12 de ce chapitre.

Sur ces figures, on a représenté l'image de la bande de plan ($-\infty < t < \infty$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$) en coordonnées v, w qui est une bande de plan inclinée (l'inclinaison dépend des valeurs des paramètres a, r, θ^{100}) et à titre d'illustration, sur la figure 15-4-1a, la bande suivante à $\varphi = \varphi + 2\pi$.

Les droites en trait plein inclinées en coordonnées v, w correspondent à $\varphi = \text{constante}$. Les lignes à $t = \text{constante}$ sont également des droites représentées en trait interrompu (deviennent des ellipses lorsqu'on compacifie). Les paramètres w, v et varient de $-\infty$ à $+\infty$, mais dans cette bande.

Nous avons constaté que dans un trou noir de Kerr de paramètre de rotation¹⁰¹ a , à φ constant, en tout point de l'espace temps, la pente de la droite décrite dans les coordonnées v, w quand t varie est la même ($1/a$). Ce n'est pas le cas lorsqu'on se place à t constant et que l'on fait varier φ (dépend de a mais aussi de r et θ).

On sait que cet espace temps est stationnaire mais comme la métrique ne dépend pas de φ non plus cela n'explique pas la différence entre les deux.

Cela montre bien que le caractère essentiel est la rotation dans cette solution, rotation qui fait tourner le vecteur de base de φ par rapport à t , et que cette rotation dépend de a, r et θ .

Pour le vecteur de type temps, V est une combinaison de ∂_t et ∂_φ de sorte que le plan V, ∂_r soit toujours de type temps (on sait que le produit scalaire est nul). Comme ∂_r est de type espace à l'infini, V doit être de type temps à l'infini et V, ∂_r doivent changer de signe en même temps.

Le vecteur V est tel que $\langle V, V \rangle = \Delta \rho^2$, comme nous l'avons calculé, précédemment. Il est de type temps (en signature +, -, -, -) à l'infini et change de signe avec Δ . Le vecteur ∂_r est tel que $\langle \partial_r, \partial_r \rangle = \rho^2/\Delta$, il est de type espace à l'infini et change de signe avec Δ , comme V . La condition est donc satisfaite. Le vecteur V est orthogonal aux autres vecteurs de base (dont ∂_r), ce qui est vérifié (trivialement pour ∂_r et ∂_θ du fait que les composantes r et θ de V sont nulles et qui se vérifie simplement pour $\langle V, W \rangle$).

Quant à W , tel que $\langle W, W \rangle = -\rho^2 \sin^2 \theta$, il est partout de type espace et est orthogonal à V et aux autres vecteurs de base, ce qu'on peut vérifier facilement.

Nous nous sommes attaché à décrire l'espace temps pour $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Bien entendu si on ne se limite pas à $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, mais qu'on représente le plan complet ($-\infty < t < \infty$, $-\infty < \varphi < +\infty$), on a une infinité de bandes de plan verticales parallèles jointives, représentant une infinité de fois le même sous espace temps, couvrant tout le plan (t, φ), dont l'image est une infinité de bandes inclinées jointives couvrant également tout le plan et représentant une infinité de fois le même sous espace temps en coordonnées v, w .

Bien que cela ne soit pas évident sur la nouvelle forme de la métrique, compte tenu du caractère topologique de boucles de type temps, on voit que les coordonnées v et w peuvent varier en décrivant une boucle à t constant. Ceci est représenté par l'ellipse bleue pointillée sur la figure 15-4-2

Montrons simplement que cette boucle peut être de type temps dans la « machine temporelle » ce qui permet de réaliser une boucle temporelle.

¹⁰⁰ Remarquons que la représentation en v, w ne dépend pas de m , l'autre paramètre de la métrique de Kerr (ici on considère le cas sans charge).

De $v = (t - a \sin^2 \theta \varphi) / \rho^2$, $w = (a t - (r^2 + a^2) \varphi) / \rho^2$, (pour une valeur de $\varphi = \varphi_0$ donnée), en éliminant t on tire:

$w = a v - \varphi_0$, soit $v = (w - \varphi_0) / a$, (équation d'une droite qui ne dépend ni de θ ni de r , mais seulement de a et de la valeur de φ). La pente de cette droite est constante pour un trou noir donné ($v/w = 1/a$), ce qui permet de raccorder toutes les bandes de plan obliques (correspondantes à un incrément de $2N\pi$ de φ) pour couvrir le plan (v, w).

Pour une valeur de $t = t_0$ donnée en éliminant φ , on tire: $w a \sin^2 \theta = (r^2 + a^2) v - t_0$. C'est également l'équation d'une droite, mais qui dépend en plus de θ et de r .

¹⁰¹ Notons que la masse du trou noir n'intervient pas dans ce calcul.

En effet avec t constant v et w ne comportent que la partie qui dépend de φ , ($v = -a \sin^2 \theta \varphi / \rho^2$, $w = -[(r^2 + a^2) \varphi] / \rho^2$, on peut utiliser alors la forme (15-4-1-2) avec $dt = 0$ (on rappelle que θ et r sont constants).

Elle s'écrit :

$$ds^2 = (\Delta / \rho^2) (a \sin^2 \theta d\varphi)^2 - (\sin^2 \theta / \rho^2) ((r^2 + a^2) d\varphi)^2 = (\sin^2 \theta / \rho^2) [\Delta a^2 \sin^2 \theta - (r^2 + a^2)^2] d\varphi^2$$

Le ds^2 est de type temps si $\Delta a^2 \sin^2 \theta - (r^2 + a^2)^2 > 0$ ce qui est la condition délimitant la machine temporelle¹⁰². Sur cette boucle à t constant, mais avec v et w qui varient, l'élément de longueur peut donc être de type temps, donc la boucle complète puisque la condition $\Delta a^2 \sin^2 \theta - (r^2 + a^2)^2 > 0$ est satisfaite sur toute la boucle.

Enfin, en rapprochant 15-4-1-1 de la forme de la métrique de Kerr en coordonnées de Boyer Lindquist,

$$ds^2 = (\Delta / \rho^2) (dt - a \sin^2 \theta d\varphi)^2 - (\sin^2 \theta / \rho^2) (a dt - (r^2 + a^2) d\varphi)^2 - (\rho^2 / \Delta) dr^2 - \rho^2 d\theta^2 \quad (15-4-1-2)$$

où on aurait posé,

$$dv = (dt - a \sin^2 \theta d\varphi) / \rho^2, \quad dw = (a dt - (r^2 + a^2) d\varphi) / \rho^2 \quad (15-4-1-3)$$

la forme des vecteurs canoniques V, W nous est suggérée naturellement.¹⁰³

Forme de Kerr Schild:

La forme de Kerr Schild de la métrique¹⁰⁴ s'écrit avec les tétrades e^a_μ , avec $i = 1, 2, 3$.

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 2m.r (e^0_\mu + e^i_\mu)(e^0_\nu + e^i_\nu)$$

Les symétries révélées par les vecteurs canoniques

Le tenseur covariant $f_{\mu\nu}$ de Killing Yano révélé par R. Penrose et ses collaborateurs s'écrit:

$$f_{\mu\nu} = 2a \cos \theta e^1_{[\mu} e^0_{\nu]} - 2r e^2_{[\mu} e^3_{\nu]}$$

En tant que tenseur de Killing Yano, il satisfait à la condition très restrictive: $f_{\mu\nu} ;_\lambda = f_{[\mu\nu} ;_{\lambda]}$

Ce qui conduit à la solution symétrique de l'équation des tenseurs de Killing:

$$K_{\mu\nu} = f_{\mu\lambda} f^\lambda_\nu, \quad K_{(\mu\nu} ;_{\lambda)} = 0$$

ainsi qu'aux solutions secondaires et primaires (avec $k^\mu \partial / \partial x^\mu = \partial / \partial t$ et $h^\mu \partial / \partial x^\mu = \partial / \partial \varphi$)

$$k^\mu = K^\mu_\nu k^\nu = a^2 k^\mu + a h^\mu, \quad k^\mu = 1/6 \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} f_{\rho\sigma} ;_\nu$$

avec l'équation vectorielle de Killing: $k_{(\mu} ;_{\nu)} = 0$

¹⁰² Cette expression se simplifie et donne $-(r^2 + a^2 + 2mr.a^2 \sin^2 \theta / \rho^2)$. La condition est alors: $r^2 + a^2 + 2mr.a^2 \sin^2 \theta / \rho^2 < 0$.

¹⁰³ L'intégration « triviale à t, θ constants donne: $v = (t - a \sin^2 \theta \varphi) / \rho^2$, $w = (a t - (r^2 + a^2) \varphi) / \rho^2$

¹⁰⁴ Voir [59] pour plus de détails.

Les constantes du mouvement géodésique défini par $p^\mu p^\nu_{;\mu}$ sont l'énergie $E = k^\mu p_\mu$ et le moment axial angulaire $M = h^\mu p_\mu$ et l'autre constante $K = K^{\mu\nu} p_\mu p_\nu$ correspondant au quatrième invariant comme nous l'avons calculé au chapitre 8.¹⁰⁵

5- « Métrique » dans les coordonnées associées aux vecteurs canoniques normés

Si on fait le même calcul (avec les mêmes restrictions) avec les vecteurs normés ∂_u, ∂_s :

$$\partial_u = \partial_v / |(-\Delta\rho^2)|^{1/2} \text{ et } \partial_s = \partial_w / (\rho^2 \sin^2\theta)^{1/2}$$

on obtient :

$$c^2 d\tau^2 = du^2 - ds^2 - (\rho^2/\Delta).dr^2 - \rho^2.d\theta^2 \quad (15-4-1-4)$$

La coordonnée de type temps u est le temps propre. Nous commenterons cette forme à la fin.

6- Commentaires sur la forme de la métrique :

On voit que : g_{vv} s'annule bien pour $\Delta = 0$, et suit le signe de Δ , ce qui est normal puisque le champ de vecteur V s'annule sur l'horizon, g_{ww} est toujours de type espace, ce qui confirme bien le fait que W est toujours de type espace, g_{vw} est nul: la forme de la métrique est diagonale.

Ici, le plan V, ∂_r est toujours de type temps et le plan perpendiculaire W, ∂_θ est toujours de type espace. Il n'y a jamais donc jamais deux coordonnées de type temps simultanément, mais cela n'élimine pas pour autant les boucles temporelles comme nous l'avons indiqué précédemment.

Le vecteur de Killing de type temps $(\partial_v)^\mu$ s'annule sur les horizons (externes et interne)

La singularité en $\rho^2 = 0$ a disparu. Mais on voit que la métrique est dégénérée en $\rho^2 = 0$, puisque tous ses termes sont nuls (pour $r = 0$ et $\theta = \pi/2$).

On remarque que $g_{vv}/\rho^2 = g_{rr}/\rho^2$ satisfait à la même relation que g_{tt} et g_{rr} en métrique de Schwarzschild. Il reste à apprécier la consistance physique de la coordonnée temps v ainsi définie et son lien avec le temps propre, seul paramètre temps physique, pour voir si elle convient mieux physiquement que la coordonnée t utilisée dans la forme de Boyer Lindquist.

7- Comportement asymptotique vecteurs canoniques V, W

$\Delta\rho^2.dv^2$ représente asymptotiquement le (carré) du temps propre si on suppose $dw = dr = d\theta = 0$.

Ce qui implique entre autres que :

$$a.dt - (r^2+a^2) d\phi = 0, \text{ soit } dt/d\phi = (r^2+a^2)/a \rightarrow \infty, \text{ quand } r \rightarrow \infty \quad (15-7-1)$$

Remarquons que cette condition correspond à l'équation géodésique d'une géodésique principale nulle, comme cela a été montré au chapitre 14 §12 du document.

Tout ceci nous amène à postuler que ces conditions asymptotiques convergent mieux dans ces coordonnées que dans celles de Boyer Lindquist dans le cas de cette métrique stationnaire vers une interprétation physique.

8- Energie et moment angulaire conservés en coordonnées V, W

Ces grandeurs ne faisant intervenir que les vecteurs de Killing (et les coordonnées associées), nous pouvons utiliser les éléments que nous avons établis dans ce chapitre avec ces vecteurs canoniques et calculer les valeurs des quantités conservées dans ce système de coordonnées.

¹⁰⁵ B. Carter définit d'autres grandeurs dans [59] p.15 et les opérateurs auto adjoints associés.

A noter que ∂_v et ∂_w sont des vecteurs de Killing pour cette « forme de la métrique », mais que les quantités conservées E_v et L_w sur les géodésiques sont différentes de E et L de la forme de Boyer Lindquist de la métrique de Kerr Newman.

Elles peuvent être calculées les unes par rapport aux autres.

Dans les coordonnées v, w , la conservation de l'énergie (en appelant K_v et K_w , les vecteurs de Killing associés à v et w) sur des géodésiques s'écrit:

$$E_v = K_v p^v = K_v m \cdot dv/d\tau \rightarrow dv/d\tau = E_v / K_v m. \quad (15-8-1)$$

Et celle du moment angulaire

$$L_w = K_w p^w = K_w m \cdot dw/d\tau \quad \text{soit} \quad dw/d\tau = L_w / K_w \cdot m. \quad (15-8-2)$$

$$\text{Avec :} \quad K_v = \Delta \rho^2 \text{ et } K_w = \rho^2 \sin^2 \theta. \quad (15-8-3)$$

En coordonnées de Boyer Lindquist, en prenant la masse de la particule de test égale à 1, on a:

$$E = g_{tt} dt/d\tau + g_{t\varphi} d\varphi/d\tau, \quad L = g_{t\varphi} dt/d\tau + g_{\varphi\varphi} d\varphi/d\tau. \quad (15-8-4)$$

De ces relations on tire (en utilisant la relation $g_{\varphi\varphi} g_{tt} - g_{t\varphi}^2 = -\Delta \sin^2 \theta$ établie au chapitre 9-6) :

$$L g_{tt} - E g_{t\varphi} = [g_{\varphi\varphi} g_{tt} - g_{t\varphi}^2] d\varphi/d\tau = -\Delta \sin^2 \theta \cdot d\varphi/d\tau \quad (15-8-5)$$

$$L g_{t\varphi} - E g_{\varphi\varphi} = -[g_{\varphi\varphi} g_{tt} - g_{t\varphi}^2] dt/d\tau = \Delta \sin^2 \theta \cdot dt/d\tau \quad (15-8-6)$$

En multipliant (15-8-5) par $a \cdot \sin^2 \theta$ et en additionnant avec (15-8-6), on obtient:

$$a \cdot \sin^2 \theta [L g_{tt} - E g_{t\varphi}] + L g_{t\varphi} - E g_{\varphi\varphi} = \Delta \cdot \sin^2 \theta [dt/d\tau - a \cdot \sin^2 \theta d\varphi/d\tau] = \Delta \cdot \rho^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot (dv/d\tau)$$

En développant le membre de gauche, et en comparant à (15-8-3), on obtient:

$$E_v = E(r^2 + a^2) - a \cdot L \quad (15-8-7)$$

En multipliant (15-8-5) par $r^2 + a^2$, (15-8-6) par a et en additionnant on obtient:

$$(r^2 + a^2) [L g_{tt} - E g_{t\varphi}] + a (L g_{t\varphi} - E g_{\varphi\varphi}) = \Delta \cdot \sin^2 \theta [a \cdot dt/d\tau - (r^2 + a^2) \cdot \sin^2 \theta d\varphi/d\tau] = \Delta \cdot \rho^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot (dw/d\tau)$$

En développant le membre de gauche, et en comparant à (15-8-3), on obtient:

$$L_w = L - a \cdot \sin^2 \theta \cdot E \quad (15-8-8)$$

On peut remarquer que E_v « diverge » pour $r \rightarrow \infty$, alors que ce n'est pas le cas pour L_w mais c'est lié à la définition de v et w par rapport à t et φ (cf équation 15-4-1-3).

En réalisant le changement de variables, dans les équations géodésiques (3-1-4) de la solution de Carter et en utilisant l'expression de E_v et L_w en termes de E et L , (15-8-7 et 15-8-8) on peut vérifier que les équations en $d\varphi/d\lambda$ et $dt/d\lambda$ se ramènent bien à celles en $dv/d\lambda$ et $dw/d\lambda$, très simples, citées en (15-8-1) et (15-8-2).

On voit donc que la forme de Boyer Linquist avec L et E comme paramètres de moment angulaire et d'énergie est équivalente à la forme « canonique » (plus simple) avec $E_v = E(r^2 + a^2) - a.L$ et $L_w = L - a.\sin^2\theta.E$ comme paramètres correspondants.

Ces paramètres sont ceux qu'on trouve dans les équations géodésiques de la solution de Carter. Ceci montre que ces coordonnées reflètent donc mieux le caractère physique de la solution de Kerr!

9- Compléments sur le comportement asymptotique: vecteurs orthonormés U,S

On a vu en (15-4-1-4) que la métrique associée (on rappelle que u est le temps propre) s'écrit :

$$c^2 d\tau^2 = du^2 - ds^2 - (\rho^2/\Delta).dr^2 - \rho^2.d\theta^2 \quad (15-9-1)$$

On voit que lorsque $r \rightarrow \infty$,
Si $r \gg a$, au deuxième ordre:
et poser $ds = 0$ implique si $\theta \neq 0$

$$\begin{aligned} du &\rightarrow [dt - a.\sin^2\theta.d\varphi] [(1-2M/r+a^2/r^2)/(1+a^2\cos^2\theta/r^2)]^{1/2} \\ du &\rightarrow [dt] [(1-M/r+a^2\sin^2\theta/2r^2)] - a.\sin^2\theta.d\varphi [1-2M/r] \\ a.dt - (r^2+a^2).d\varphi &= 0 \rightarrow d\varphi = [a/(r^2+a^2)].dt \end{aligned}$$

En reportant dans l'équation précédente, On voit que lorsque $r \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} du &\rightarrow [dt] \{ [(1-M/r+a^2\sin^2\theta/2r^2)] - \sin^2\theta. a^2/(r^2+a^2) [1-2M/r] \} \\ d\tau \rightarrow du &\rightarrow [dt] \{ [(1-M/r + a^2\sin^2\theta [1/2r^2 - [1-2M/r]]/(r^2+a^2)) \} \\ d\tau \rightarrow du &\rightarrow [dt] (1-M/r - a^2\sin^2\theta/2r^2) \end{aligned} \quad (15-9-2)$$

ce qui donne dt au premier ordre mais qui tient compte de la rotation du trou noir à l'ordre 2, ceci étant plus physique.

On voit la différence avec la solution de Boyer Lindquist où dt tendait vers $d\tau$ comme:

$$d\tau \rightarrow dt (1-2M/r)^{1/2} \rightarrow dt(1-M/r) \quad \text{lorsque } r \rightarrow \infty \quad (15-9-3)$$

La différence est liée à un paramètre de rotation au deuxième ordre supplémentaire dans du par rapport à dt , ce qui est, du moins phénoménologiquement compatible avec ce que montre l'étude de nature physique de la constante de Carter liée à un tenseur de Killing conservant une quantité physique du deuxième ordre (la quadri-impulsion au carré avec un facteur correctif).

Sans avoir démontré formellement que du était le meilleur paramètre, on voit qu'il décrit mieux (à un ordre plus élevé) la convergence asymptotique de la variable de type temps.

10- Cette forme de la métrique est associée à un observateur de Carter

On peut également remarquer que:

$$\partial_u = (r^2+a^2).[(\Delta\rho^2)^{-1/2}][\partial_t + a.\partial_\varphi/(r^2+a^2)]$$

Le vecteur de Killing de la métrique dans ces coordonnées, tangent à la coordonnée u (temps propre qui caractérise la ligne d'univers de l'observateur associé à cette forme de la métrique), est précisément la quadrivitesse d'un observateur de Carter (chute libre, sans vitesse initiale à l'infini).

Cette forme de la métrique est donc celle associée à un observateur de Carter.

11- Quelques vérifications

On peut vérifier par exemple sur la métrique, avec la définition de du et ds par rapport à t et φ , que pour t , θ , $r = \text{constante}$, on retrouve bien la condition $g_{\varphi\varphi} \geq 0$ si on veut que $c^2 d\tau^2 \geq 0$.

12- Intégration globale de la métrique tétradique locale des vecteurs canoniques

Rappelons la définition des vecteurs canoniques:

$$\begin{aligned} V &= (r^2+a^2) \partial_t + a\partial_\varphi \\ W &= a.\sin^2\theta \partial_t + \partial_\varphi \end{aligned}$$

à r et θ donnés, on peut définir les relations suivantes:

$$dv = (dt - a.\sin^2\theta.d\varphi)/\rho^2, \quad dw = (a.dt - (r^2+a^2).d\varphi)/\rho^2$$

qui s'intègrent dans le plan t, φ (à r et θ donnés) pour donner:

$$\begin{aligned} v &= (t - a.\sin^2\theta.\varphi)/\rho^2 \\ w &= (a.t - (r^2+a^2).\varphi)/\rho^2 \end{aligned}$$

mais pour que l'intégration analytique globale soit possible, il faut trouver une fonction $v(t, r, \theta, \varphi)$ dont la différentielle totale s'écrit:

$$dv = \partial_t v(t, r, \theta, \varphi) dt + \partial_\varphi v(t, r, \theta, \varphi) d\varphi + \partial_\theta v(t, r, \theta, \varphi) d\theta + \partial_r v(t, r, \theta, \varphi) dr$$

qui satisfait à:

$$\begin{aligned} \partial_t v(t, r, \theta, \varphi) &= (r^2+a^2\cos^2\theta)^{-1} \\ \partial_\varphi v(t, r, \theta, \varphi) &= -a\sin^2\theta.(r^2+a^2\cos^2\theta)^{-1} \end{aligned}$$

Comme nous nous sommes restreints au sous espace à r et θ constants ($dr = d\theta = 0$) nous ne connaissons pas:

$$\begin{aligned} \partial_\theta v(t, r, \theta, \varphi) &= ? \\ \partial_r v(t, r, \theta, \varphi) &= ? \end{aligned}$$

La forme générique de cette fonction va être $v = (t - a.\sin^2\theta.\varphi)/(r^2+a^2\cos^2\theta) + f(r, \theta)$.

On en déduit:

$$\begin{aligned} dv &= (dt - a.\sin^2\theta.d\varphi)/(r^2+a^2\cos^2\theta) + \partial_r [(t - a.\sin^2\theta.\varphi)(r^2+a^2\cos^2\theta)^{-1} + f(r, \theta)].dr + \\ &\quad \partial_\theta [(t - a.\sin^2\theta.\varphi)(r^2+a^2\cos^2\theta)^{-1} + f(r, \theta)].d\theta \end{aligned}$$

Manifestement une telle fonction n'existe pas, puisque le dv ainsi représenté ne pourrait être celui de la pseudo métrique que si les coefficients des deux derniers termes étaient identiquement nuls, ce qui est impossible car $f(r, \theta)$ ne contient des termes en θ et r , alors que l'autre expression dans le crochet contient des termes en t et φ .

Cette caractéristique de ces « coordonnées » est intermédiaire entre une base tétradique totalement indépendante du système de coordonnées et des coordonnées globales. A ce titre nous qualifierons v et w de pseudo coordonnées.

Quelle est alors la signification de la forme de la métrique en « coordonnées » v, w que nous avons établie? Peut on définir une courbe quelconque C de paramètre affine λ , par des coordonnées de la forme $v(\lambda)$, $w(\lambda)$, $r(\lambda)$, $\theta(\lambda)$?

Si c'est le cas ces coordonnées pourront être considérées comme des coordonnées globales. Donc v et w ne sont pas des coordonnées « globales » dans l'espace à 4 dimensions¹⁰⁶. Par contre tant qu'on reste dans le sous espace temps (2D) t, φ , elles sont utilisables comme coordonnées, ce qui n'est pas sans intérêt comme les calculs développés dans ce chapitre l'ont montré.

¹⁰⁶Rappelons que des coordonnées sont des fonctions. Si on considère une courbe C , de paramètre affine λ , appartenant à la variété 4D décrivant l'espace temps, si x^μ sont des coordonnées sur cette variété, on définit les coordonnées des points sur la courbe par $x^\mu(\lambda)$. Si on définit d'autres coordonnées $x^\nu(\lambda)$, de façon générale nous avons des relations entre ces coordonnées du type $x^\mu = f(x^\nu)$ et inversement $x^\nu = g(x^\mu)$.

B- Le formalisme de Newmann Penrose

1- Généralités : Raison de ce choix.

Nous utiliserons ici le formalisme le Newman Penrose qui s'appuie sur base est formée de vecteurs nuls¹⁰⁷.

Ce choix, manifestement adapté à la description de géodésiques de type « lumière », peut paraître étrange pour décrire physiquement les lignes d'univers de particules massives réelles. Mais il va se révéler être un « intermédiaire de calcul » particulièrement efficace, simplifiant considérablement les calculs, sachant que par un changement de coordonnées approprié (opération triviale en Relativité Générale, du fait de la covariance), on pourra transformer les résultats obtenus par cette méthode dans une base tétradique réelle (dans la tétrade « co-mobile »), adaptée à la description physique de la ligne d'univers de particules massives réelles. C'est la démarche que nous suivrons.

Indépendamment de l'aspect purement pratique, comme cette simplification le laisse supposer (si les calculs sont simplifiés dans une telle base, ce n'est pas sans raisons), ce choix révèle l'importance des géodésiques de type lumière dans la description de la structure de ces espaces temps¹⁰⁸. Ce qui rejoint d'ailleurs la méthode qui a permis à Kerr de trouver sa solution.

Ce formalisme¹⁰⁹ a été établi sur la conviction que les cônes de lumière sont un élément essentiel de la structure des espaces temps, et que la structure des cônes de lumière révèle, plus que tout autre, les symétries de ces espaces temps.

Explicitons comment ce formalisme simplifie les calculs des équations d'Einstein.

Dans le cas général elles se composent de dix équations couplées aux dérivées partielles du second ordre hautement non linéaires, pour les dix composantes du tenseur métrique, ce qui les rend extrêmement difficiles à résoudre.

Dans ce formalisme elles se transforment en 30 équations différentielles partielles, relatives à 30 variables, toutes du premier ordre (au lieu du second) et presque linéaires.

On voit que l'intérêt de la méthode réside alors principalement dans:

Le fait que les équations soient du premier ordre au lieu du second

Le fait qu'elles soient quasiment linéaires (ce qui facilite leur résolution numérique)

Et de façon surprenante, le fait que le grand nombre de variables permet d'imposer facilement des conditions particulières.

L'analyse de l'espace temps de Kerr Newman, en particulier l'étude du tenseur de Weyl associé montre que c'est bien dans cette base que les symétries de cet espace temps sont le mieux représentées, autrement dit, c'est dans cette base que le tenseur de Riemann (qui est égal au tenseur de Weyl dans le vide) va trouver sa forme la plus simple, ce qui va nous être bien utile, ces tenseurs à quatre indices étant en général assez lourds à calculer¹¹⁰.

En particulier les « forces de marées » qui vont être calculées à partir de ces tenseurs vont se présenter sous une forme particulièrement « simple ».

¹⁰⁷ On voit immédiatement que la base n'est pas orthonormée, car la norme des vecteurs nuls est zéro et pas « 1 » et d'autre par les conditions d'orthogonalité sont particulières (comme cela sera détaillé plus loin).

¹⁰⁸ Voir classification de Petrov annexe 12.

¹⁰⁹ Voir annexe 1 de ce document pour les approches de Newman et Penrose de ce problème.

¹¹⁰ Pour les tenseurs de Riemann et Weyl, Mathematica 4 permet ces calculs simplement maintenant.

On rappelle qu'on peut considérer que l'espace temps (la Variété) au lieu d'être décrit comme un ensemble de points (repérés par des coordonnées) peut être décrit de façon plus structurée, par un ensemble de courbes géodésiques qui le « remplissent » totalement et le caractérisent (on réalise une congruence de géodésiques).

Ici on choisit des géodésiques suivies par la lumière (géodésiques nulles) et la tétrade naturellement associée va avoir des vecteurs de bases tangent à ces courbes.

Cette base, sera naturellement constituée des deux vecteurs doubles nuls principaux (puisque'ils caractérisent la structure de cet espace temps et notamment ses symétries associées au tenseur de Weyl de type D dans la classification de Petrov Pirani¹¹¹) et il faudra compléter par deux autres vecteurs indépendants des premiers vecteurs pour obtenir la tétrade.

2- Définition de la base de vecteurs dans le formalisme de Newman Penrose

Ceci étant précisé, mettons en place les éléments dont nous allons avoir besoin. Commençons par définir précisément la base de vecteurs du formalisme de Newman-Penrose.

Nous allons choisir comme vecteurs de base, les vecteurs nuls l, n, m et m^* , où l et n sont réels et m et m^* sont des complexes conjugués¹¹²

Ils doivent satisfaire aux conditions d'orthogonalité suivantes¹¹³

$$l.m = l.m^* = n.m = n.m^* = 0$$

et ils doivent aussi être tous nuls:

$$l.l = n.n = m.m = m^*.m^* = 0$$

De plus nous imposons qu'ils satisfassent à une condition de « normalisation »¹¹⁴

$$l . n = 1 \text{ et } m.m^* = -1$$

Nous avons ainsi défini une base de 4 vecteurs contravariants nuls.¹¹⁵

$$e_1 = l, e_2 = n, e_3 = m, e_4 = m^*$$

La base covariante associée est :

$$e^1 = e_2 = n, e^2 = e_1 = l, e^3 = -e_4 = m^* \text{ et } e^4 = -e_3 = -m \quad 116$$

Habituellement on choisit une base de vecteurs telle que la matrice $\eta_{(a)(b)}$ correspondante est la matrice diagonale de l'espace temps de Minkowski $(1, -1, -1, -1)$, ce qui correspond à la description géométrique naturelle de l'espace local (espace tangent).

¹¹¹ Pour plus de détails, sur la classification de Petrov , cf annexe 12 , ou [47] p.343-347) pour une autre approche .

¹¹² Penrose traite le problème par des spineurs (voir annexe 1). Notons qu'on peut définir deux vecteurs réels x et y orthonormés tels que : $m = x + iy$ et $m^* = x - iy$ avec $x.y = 0, xx = yy = 1$.

¹¹³ Cette condition d'orthogonalité n'est pas la condition habituelle, qui imposerait également $l.n = m.m^* = 0$,

¹¹⁴ Cette définition de la norme n'est pas la définition habituelle (qui correspond à l'autoproduit scalaire).

¹¹⁵ L'espace localement défini par cette base n'est pas l'espace-temps de Minkowski, comme les remarques précédentes l'indiquent et comme montré dans la suite du document. De plus, s'agissant des vecteurs de la base et non pas des composantes, remarquons la position des indices, indice bas pour les vecteurs de la base contravariante et l'inverse pour la base covariante.

¹¹⁶ Il n'est pas trivial que les vecteurs de la base covariante soient les mêmes (ou opposés) que ceux de la base contravariante, la différence ne résidant que dans l'ordre des vecteurs de base. Cela veut dire que ce tenseur métrique définit un espace plat cotangent qui ne diffère de l'espace tangent que par une « symétrie (anti)miroir »

Des considérations formelles montrent qu'on peut aussi développer un formalisme plus général avec d'autres matrices $\eta_{(a)(b)}$ ¹¹⁷.

Nous avons indiqué précédemment les raisons qui nous avaient incitées à faire un autre choix.

Ici nous avons le tenseur symétrique à éléments constants.

$$\eta_{(a)(b)} = \eta^{(a)(b)} = e_{(a)}^i e_{(b)i} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Avec cette matrice il est facile de vérifier que les relations donnant la base covariante sont satisfaites : Par exemple : $e^l = \eta^{(a)(b)} e_{(b)} = \eta^{(l)(b)} e_{(b)} = 0.e_1 + 1.e_2 + 0.e_3 + 0.e_4 = e_2 = n$.

3- Remarques complémentaires sur le tenseur $\eta_{(a)(b)}$:

Il est caractéristique d'une métrique sans courbure (ses composantes sont constantes).

Il est en quelque sorte la « racine carrée » du tenseur unitaire car $\eta_{(a)}^{(b)} \eta_{(b)(c)} = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$.

Plus précisément, considéré comme opérateur, le tenseur métrique réalise une symétrie miroir pour les vecteurs de bases réels ($e_1 \leftrightarrow e_2$) et une anti-symétrie miroir pour les vecteurs complexes ($e_3 \rightarrow -e_4$ et $e_4 \rightarrow -e_3$), comme nous l'avons indiqué dans la note de bas de page.

Nous avons les mêmes vecteurs de base (la base de vecteurs définit un espace temps sans courbure) mais pas dans le même ordre et au signe près pour les vecteurs de base complexes.

En ce sens, l'approche spinorielle de Penrose est peut être plus éclairante.

Cette propriété caractérise géométriquement l'espace ainsi défini dont le dual se définit par une symétrie particulière, une application de l'espace vectoriel sur lui-même. Etant sans courbure, les espaces vectoriels contravariants et covariants sont ici globalement confondus au lieu d'être disjoints.

Nous verrons plus loin les relations entre cette base et une base orthonormée classique par des transformations très simples. Rappelons que nous avons choisi les vecteurs nuls l et n correspondant aux directions nulles principales¹¹⁸, pour que l'expression du tenseur de Riemann¹¹⁹ soit la plus simple possible.

4- Coefficients de rotation de Ricci

Dans le formalisme des tétrades, pour effectuer la dérivation covariante, on est amené à introduire les coefficients de rotation de Ricci (ou coefficients de spin, ainsi nommés parce que ils sont utilisés pour effectuer la dérivation de spineurs).

On sait qu'un vecteur peut être défini comme l'opérateur correspondant à la dérivée directionnelle d'une fonction scalaire Φ dans la direction de ce vecteur.

$$e_{(a)} = e_{(a)}^i \partial / \partial x^i \quad \text{soit:} \quad \Phi_{, (a)} = e_{(a)}^i \partial \Phi / \partial x^i$$

Plus généralement on peut écrire: $A_{(a), (b)} = e_{(b)}^i A_{(a); i}$

¹¹⁷ Voir par exemple « The mathematical theory of black holes » de S. Chandrasekar p 41.

¹¹⁸ Chaque tenseur de Weyl définit, en général, 4 directions principales nulles, ici l'espace temps étant de type D ces 4 directions se réduisent à deux directions doubles (Landau Lifchitz §92)

¹¹⁹ Dans le vide le tenseur de Riemann se réduit au tenseur de Weyl, mais ici du fait de la charge et du champ électrique, dans la solution complète, ce n'est pas strictement le cas (c'est le cas en solution de Kerr).

Puisque nous dérivons par rapport aux coordonnées globales, nous devons prendre les dérivées covariantes¹²⁰.

$$e_{(b)}^i (e_{(a)}^j A_j)_{;i} = e_{(b)}^i [e_{(a)}^j A_{j;i} + A_k e_{(a)}^k{}_{;i}]$$

Nous obtenons alors:

$$A_{(a), (b)} = e_{(a)}^j A_{j;i} e_{(b)}^i + e_{(a)k;i} e_{(b)}^i e_{(c)}^k A^{(c)}$$

On a abaissé l'indice k de sommation du vecteur de base $e_{(a)}^k$ et élevé en contrepartie celui des composantes associées A_k , pour laisser l'expression invariante. En posant alors:

$$\gamma_{(c) (a)(b)} = e_{(c)}^k e_{(a)k;i} e_{(b)}^i{}^{121}$$

Qu'on appellera « coefficients de rotation de Ricci », on obtient :

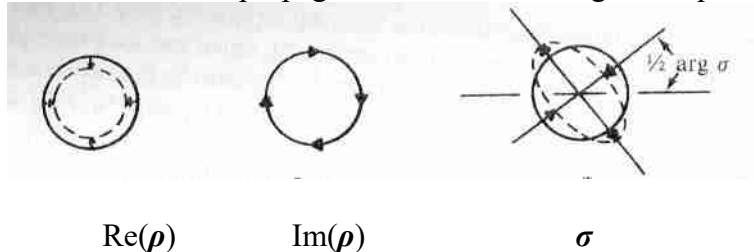
$$A_{(a), (b)} = e_{(a)}^j A_{j;i} e_{(b)}^i + \gamma_{(c) (a)(b)} A^{(c)}$$

Certains coefficients de rotation de Ricci sont désignés par ses symboles particuliers:

$$\begin{array}{lll} \kappa = \gamma_{311} & \rho = \gamma_{314} \varepsilon = \frac{1}{2} (\gamma_{211} + \gamma_{341}) \\ \sigma = \gamma_{313} & \mu = \gamma_{243} \gamma = \frac{1}{2} (\gamma_{212} + \gamma_{342}) \\ \lambda = \gamma_{244} & \tau = \gamma_{312} & \alpha = \frac{1}{2} (\gamma_{214} + \gamma_{344}) \\ \nu = \gamma_{242} & \pi = \gamma_{241} & \beta = \frac{1}{2} (\gamma_{213} + \gamma_{343}) \end{array}$$

5- Scalaires Optiques de la classification de Petrov

Rappelons l'interprétation géométrique de certains de ces coefficients avec les « scalaires optiques » définis dans la classification de Petrov, qui décrivent le comportement d'une section circulaire perpendiculaire à la direction de propagation du faisceau de géodésiques de la congruence.



$\text{Re}(\rho)$

$\text{Im}(\rho)$

σ

Fig.15B-1 : La partie réelle de ρ contrôle l'expansion de la section circulaire, la partie imaginaire de ρ contrôle la rotation et σ représente l'anisotropie.

Rappelons que ces coefficients de rotation de Ricci permettent de calculer le tenseur de Riemann¹²² en base tétradratique:

$$R_{(a)(b)(c)(d)} = \gamma_{(a)b(c), (d)} - \gamma_{(a) (b)(d), (c)} + \gamma_{(a)(b)(f)} (\gamma_{(c)(d)}^{(f)} - \gamma_{(d)(c)}^{(f)}) + \gamma_{(a)(f)(c)} \gamma_{(b)(d)}^{(f)} - \gamma_{(a)(f)(d)} \gamma_{(b)(c)}^{(f)}$$

6- Scalaires de Weyl dans le formalisme de Newman-Penrose

Définissons cinq fonctions scalaires complexes, qui dans ce formalisme vont représenter les dix composantes indépendantes (dans le cas général) du tenseur de Weyl¹²³

¹²⁰ La dérivée « simple » dans la direction d'un vecteur (dans l'espace plat tangent) est fondamentalement différente de la dérivée « covariante » par rapport aux coordonnées globales (sur la variété courbe) ;

¹²¹ On les appelle aussi coefficients de spin. Voir par exemple « The mathematical theory of black holes » de S. Chandrasekar p 42. Ce sont des fonctions scalaires à valeur complexe.

¹²² La dérivée covariante de la quantité scalaire $\gamma_{(c) (a)(b)}$ coïncide avec sa dérivée partielle simple.

¹²³ Ce sont des scalaires (contraction du tenseur de Weyl avec les composantes de 4 vecteurs contravariants), ils sont complexes car m et m^* sont complexes.

$$\begin{aligned}\psi_0 &= -C_{lm lm} = -C_{pqrs} l^p m^q l^r m^s \\ \psi_1 &= -C_{ln lm} = -C_{pqrs} l^p n^q l^r m^s \\ \psi_2 &= -C_{lm m^* n} = -C_{pqrs} l^p m^q m^{*r} n^s \\ \psi_3 &= -C_{ln m^* n} = -C_{pqrs} l^p n^q m^{*r} n^s \\ \psi_4 &= -C_{nm^* nm^*} = -C_{pqrs} n^p m^{*q} n^r m^{*s}\end{aligned}$$

Les vecteurs conjugués sont marqués d'une étoile.

Notons que par la symétrie: $l \leftrightarrow n, m \leftrightarrow m^*, \psi_0 \leftrightarrow \psi_4, \psi_1 \leftrightarrow \psi_3, \psi_2 \leftrightarrow \psi_2$

On peut exprimer les composantes $C_{(ab)(cd)}$ du tenseur de Weyl dans la tétrade nulle ainsi:

	$l.n$	$l.m$	$l.m^*$	$n.m$	$n.m^*$	$m.m^*$
$l.n$	$-(\psi_2 + \psi_2^*)$	$-\psi_1$	$-\psi_1^*$	ψ_3^*	ψ_3	$-(\psi_2 - \psi_2^*)$
$l.m$		$-\psi_0$	0	0	ψ_2	ψ_1
$l.m^*$			$-\psi_0^*$	ψ_2^*	0	$-\psi_1^*$
$n.m$				$-\psi_4^*$	0	ψ_3^*
$n.m^*$					$-\psi_4$	$-\psi_3$
$m.m^*$						$-(\psi_2 + \psi_2^*)$

Tableau 15B(1)

Compte tenu que $C_{(ab)(cd)}$ est symétrique par paires, on n'a représenté que la moitié du tableau.

Le théorème de Goldberg et Sachs et un corollaire de ce théorème¹²⁴ montrent que dans l'espace temps de Kerr Newman où le nombre de composantes indépendantes est réduit du fait des symétries de cet espace, les coefficients de Ricci $\kappa, \sigma, \nu, \lambda,$ sont nuls, et que ε peut l'être par paramétrage affine¹²⁵ de l .

Ce théorème se démontre en utilisant l'identité de Bianchi $R_{[\rho\sigma;\lambda]\mu\nu} = 0$, exprimée dans la base tétradratique du formalisme NP, qui se traduit par un système de six équations entre certains scalaires ψ_i et certains coefficients de spin [40] p 48-63.

Sur les cinq scalaires de Weyl qui représentent les 10 composantes indépendantes du tenseur de Weyl.

$$\psi_0 = -C_{lm lm}, \quad \psi_1 = -C_{ln lm}, \quad \psi_2 = -C_{lm m^* n}, \quad \psi_3 = -C_{ln m^* n}, \quad \psi_4 = -C_{nm^* nm^*}$$

Alors seul ψ_2 n'est pas nul. Les coefficients de rotation de Ricci non nuls permettent de calculer le seul scalaire de Weyl non nul (ψ_2) [40] p48-63 & p319-320.

On verra aussi l'invariance de certaines composantes vis-à-vis des transformations de Lorentz « boosts » dans « l'hypersurface l, n » dans notre cas.

7- Métrique exprimée en fonction de la tétrade définissant les vecteurs de base.

Rappelons que dans ce cas la métrique peut s'exprimer à partir des tétrades notées e_μ^a par l'équation:

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab},$$

avec la valeur de $\eta_{(a)(b)}$, citée précédemment que nous avons choisie, soit:

¹²⁴ Si le champ est algébriquement spécial et de type D (classification de Petrov cf. annexe 12), ce qui est le cas de l'espace temps de Kerr Newman, alors les congruences formées par les deux directions principales nulles l et n sont à la fois géodésiques et sans cisaillement, c.a.d : $\kappa = \sigma = \nu = \lambda = 0$ et $\psi_0 = \psi_1 = \psi_3 = \psi_4 = 0$.

¹²⁵ Si l est paramétré de façon affine alors $\varepsilon = 0$ cf [40].

$$g_{ij} = (l_i n_j + l_j n_i - (m_i m_j^* + m_j m_i^*))^{126}$$

En développant cette expression et en calculant séparément $l_i n_j + l_j n_i$ et $-m_i m_j^* - m_j m_i^*$, en utilisant les composantes covariantes de ces vecteurs calculées dans l'exemple traité plus loin:

$$\begin{aligned} l_\mu &= (-1, \rho^2/\Delta, 0, a.\sin^2\theta) \\ n_\mu &= (-\Delta/2\rho^2, -1/2, 0, \Delta a.\sin^2\theta/2\rho^2) \\ m_\mu &= (1/\rho.\sqrt{2})(i.a.\sin\theta, 0, -\rho^2, -i.\sin\theta(r^2+a^2)) \\ m_\mu^* &= (1/\rho^*.\sqrt{2})(-i.a.\sin\theta, 0, -\rho^2, +i.\sin\theta(r^2+a^2)) \end{aligned}$$

Vérifions le pour un coefficient, on obtient par exemple pour :

$$g_{00} = (l_0 n_0 + l_0 n_0) - (m_0 m_0^* + m_0 m_0^*) = (\Delta/\rho^2) - 1/\rho^2(a^2 \sin^2\theta) = (1/\rho^2)[\Delta - a^2 \sin^2\theta] = 1 - 2Mr/\rho^2$$

Ce qui est bien le résultat escompté en signature (+, -, -, -)

8- Tenseur de Killing conforme

Un théorème important (Walker, Penrose) montre que si k est une géodésique de type lumière paramétrée de façon affine et f un vecteur orthogonal à k et transporté parallèlement le long de la géodésique, alors dans un espace temps de type D la quantité :

$$K_s = k^i f^j (l_i n_j + l_j n_i - m_i m_j^* - m_j m_i^*) \psi 2^{-1/3} = 2[(k.l)(f.n) - (k.m)(f.m^*)] \psi 2^{-1/3}$$

est conservée le long de la géodésique (les vecteurs sont représentés en caractères gras) .

Ceci revient à dire qu'un espace temps de type D admet un tenseur de Killing conforme, propriété qui va permettre la séparation de l'équation de Hamilton Jacobi et va éclairer la nature physique de ce type d'espace temps.

9- Coordonnées de la base tétradique en coordonnées de Boyer Lindquist

Dans les coordonnées de Boyer Lindquist, $x^\mu = (t, r, \theta, \varphi)$, une telle base de vecteurs nuls¹²⁷ est donnée par:

$$\begin{aligned} l^\mu &= (1/\Delta)(r^2+a^2, \Delta, 0, a) \\ n^\mu &= (1/2\rho^2)(r^2+a^2, -\Delta, 0, a) \\ m^\mu &= (1/\rho'.\sqrt{2})(i.a.\sin\theta, 0, 1, i/\sin\theta) \\ m^{*\mu} &= (1/\rho^*.\sqrt{2})(-i.a.\sin\theta, 0, 1, -i/\sin\theta) \end{aligned}$$

avec $\rho' = r + i.a.\cos\theta$ et $\rho^* = r - i.a.\cos\theta$

pour les composantes co-variantes des mêmes vecteurs nous avons (cf calcul qui suit) :

$$\begin{aligned} l_\mu &= (-1, \rho^2/\Delta, 0, a.\sin^2\theta) \\ n_\mu &= (-\Delta/2\rho^2, -1/2, 0, \Delta a.\sin^2\theta/2\rho^2) \\ m_\mu &= (1/\rho'.\sqrt{2})(i.a.\sin\theta, 0, -\rho^2, -i.\sin\theta(r^2+a^2)) \\ m_\mu^* &= (1/\rho^*.\sqrt{2})(-i.a.\sin\theta, 0, -\rho^2, +i.\sin\theta(r^2+a^2)) \end{aligned}$$

Permutons, l'ordre des coordonnées de sorte que: $x^\mu = (t, \varphi, r, \theta)$

De plus séparons les parties réelles et imaginaires de m . Ceci donne :

¹²⁶ On retrouve ici un des éléments de la démarche originale de Kerr qui consistait à rechercher une solution de la métrique d'espace temps qui était la somme d'un espace de Minkowski et du produit tensoriel de vecteurs nuls.

¹²⁷ Voir Chandrasekar "The mathematical theory of black holes" p 299

$$\begin{aligned}l^\mu &= (1/\Delta)(r^2+a^2, a, \Delta, 0) \\n^\mu &= (1/2\rho^2)(r^2+a^2, a, -\Delta, 0) \\m^\mu &= (1/\rho^2\sqrt{2})(a^2\sin\theta\cos\theta+i.r.a.\sin\theta, a.\cot\theta+i.r/\sin\theta, 0, r-i.a.\cos\theta)\end{aligned}$$

10- Vérification de la nullité des vecteurs utilisés

Vérifions que par exemple, $l^\mu n^\mu$ sont nuls, calculons:

$$l_\mu = g_{\mu\nu} l^\nu, l_0 = g_{00} l^0 + g_{30} l^3, l_1 = g_{11} l^1, l_2 = g_{22} l^2, l_3 = g_{30} l^0 + g_{33} l^3$$

On fait les calculs et en simplifiant on obtient :

$$l_\mu = (-1, \rho^2/\Delta, 0, a.\sin^2\theta)$$

En effectuant:

$$l_\mu l^\mu = 1/\Delta (- (r^2+a^2) + \rho^2\Delta/\Delta + a^2\sin^2\theta)$$

on vérifie que c'est bien nul.

De même calculons:

$$n_\mu = g_{\mu\nu} n^\nu, n_0 = g_{00} n^0 + g_{30} n^3, n_1 = g_{11} n^1, n_2 = g_{22} n^2, n_3 = g_{30} n^0 + g_{33} n^3$$

On obtient :

$$n_\mu = (-\Delta/2\rho^2, -1/2, 0, \Delta a.\sin^2\theta/2\rho^2)$$

En effectuant:

$$n_\mu n^\mu = 1/2\rho^2(-\Delta(r^2+a^2)/2\rho^2 + \Delta/2 + a^2\sin^2\theta\Delta/2\rho^2),$$

on vérifie également que c'est bien nul.

On peut faire le même calcul pour le vecteur complexe m^μ et son conjugué $m^{*\mu}$

$$\begin{aligned}m_\mu &= g_{\mu\nu} m^\nu, m_0 = g_{00} m^0 + g_{30} m^3, m_1 = g_{11} m^1, m_2 = g_{22} m^2, m_3 = g_{30} m^0 + g_{33} m^3 \\m_\mu &= (1/\rho^2\sqrt{2})(i.a.\sin\theta, 0, -\rho^2, -i.\sin\theta(r^2+a^2))\end{aligned}$$

En effectuant:

$$\begin{aligned}m_\mu m^\mu &= 1/2\rho^2(-a^2\sin^2\theta + 0 - \rho^2 + (i/\sin\theta)(-i.\sin\theta(r^2+a^2))) = 1/2\rho^2(-a^2\sin^2\theta - \rho^2 + (r^2+a^2)) = 0 \\m^*_{\mu} &= g_{\mu\nu} m^{*\nu}, m^{*}_0 = g_{00} m^{*0} + g_{30} m^{*3}, m^{*}_1 = g_{11} m^{*1}, m^{*}_2 = g_{22} m^{*2}, m^{*}_3 = g_{30} m^{*0} + g_{33} m^{*3} \\m^{*}_{\mu} &= (1/\rho^2\sqrt{2})(-i.a.\sin\theta, 0, -\rho^2, +i.\sin\theta(r^2+a^2))\end{aligned}$$

En effectuant:

$$m^{*}_{\mu} m^{*\mu} = 1/2\rho^2[(-a^2\sin^2\theta + 0 - \rho^2 + (i/\sin\theta)(-i.\sin\theta(r^2+a^2)))] = 1/2\rho^2[(-a^2\sin^2\theta - \rho^2 + (r^2+a^2))] = 0$$

11- Nouvelle base orthonormée comobile déduite de la précédente

Nous devons maintenant, à partir de la base nulle, construire une base tétradratique « réelle », adaptée à la description des lignes d'univers des particules réelles.

Appliquons également un « boost » dans le plan l, n de paramètre α^{128} . Cela signifie qu'on effectue une transformation de Lorentz dans ce plan contenu dans l'espace tangent, ce qui veut dire qu'on considère un référentiel « inertiel » animé d'une vitesse constante par rapport au référentiel localement inertiel (chute

¹²⁸ Un « boost » de paramètre α est une rotation « hyperbolique », la forme utilisée ici sera explicitée au § 4-12.

libre). Ceci est nécessaire si on veut que les observateurs aillent dans l'anti-univers. Au chapitre 7, nous avons montré qu'ils doivent alors franchir une barrière de potentiel élevée autour de $r = 0$ et calculé sa valeur dans un cas particulier. Ce boost correspond donc à l'énergie « cinétique » propre minimum pour franchir cette barrière. D'autre part, ceci permet d'éviter les problèmes qu'on rencontre sur les horizons de cet espace temps. En considérant les tétrades inverses $e_{(a)}^\mu$ et en appliquant, tout ceci donne :

$$\begin{aligned} e_{(1)}^\mu &= + - (e^\alpha l^\mu + e^{-\alpha} n^\mu) / \sqrt{2} \\ e_{(2)}^\mu &= + - (e^\alpha l^\mu - e^{-\alpha} n^\mu) / \sqrt{2} \\ e_{(3)}^\mu &= (m^\mu + m^{*\mu}) / \sqrt{2} \\ e_{(4)}^\mu &= -i.(m^\mu - m^{*\mu}) / \sqrt{2} \end{aligned}$$

Développons l'expression:

$$\begin{aligned} e_1^\mu &= + - (1/\sqrt{2}) ((r^2+a^2)(e^\alpha/\Delta + e^{-\alpha}/2\rho^2), a(e^\alpha/\Delta + e^{-\alpha}/2\rho^2), \Delta(e^\alpha/\Delta - e^{-\alpha}/2\rho^2), 0) \\ e_2^\mu &= + - (1/\sqrt{2}) ((r^2+a^2)(e^\alpha/\Delta - e^{-\alpha}/2\rho^2), a(e^\alpha/\Delta - e^{-\alpha}/2\rho^2), \Delta(e^\alpha/\Delta + e^{-\alpha}/2\rho^2), 0) \\ e_3^\mu &= (1/\rho^2)(a^2.\sin\theta.\cos\theta, a.\cot\theta, 0, r) \\ e_4^\mu &= (1/\rho^2)(r.a.\sin\theta, r/\sin\theta, 0, -a.\cos\theta) \end{aligned}$$

Nous avons obtenu le référentiel comobile de quatre champs de vecteurs qui va nous servir pour la plupart de nos calculs futurs. Le signe des deux premiers champs de vecteurs de la base orthogonale dépend de la partie de l'espace temps à laquelle on fait référence.

Le signe + va être utilisé pour les régions externes positives et négatives de l'espace temps de Kerr Newman (à l'extérieur des horizons) et le signe moins pour les régions internes (entre les deux horizons).

Montrons que cette nouvelle base est orthonormée: Le facteur de boost étant une constante la base covariante s'écrit :

$$\begin{aligned} e_{(1)\mu} &= + - (e^\alpha l_\mu + e^{-\alpha} n_\mu) / \sqrt{2} \\ e_{(2)\mu} &= + - (e^\alpha l_\mu - e^{-\alpha} n_\mu) / \sqrt{2} \\ e_{(3)\mu} &= (m_\mu + m^*_{\mu}) / \sqrt{2} \\ e_{(4)\mu} &= -i.(m_\mu - m^*_{\mu}) / \sqrt{2} \end{aligned}$$

Nous avons alors:

$$\begin{aligned} e_{(1)\mu} e_{(1)}^\mu &= + - [(e^\alpha l_\mu + e^{-\alpha} n_\mu) / \sqrt{2}] [(e^\alpha l^\mu + e^{-\alpha} n^\mu) / \sqrt{2}] = \\ &= [e^\alpha l_\mu e^\alpha l^\mu + e^{-\alpha} n_\mu e^{-\alpha} n^\mu + e^\alpha l_\mu e^{-\alpha} n^\mu + e^{-\alpha} n_\mu e^\alpha l^\mu] / 2 = (0 + 0 + 1 + 1) / 2 = 1 \end{aligned}$$

Car: $n_\mu l^\mu = 1$ et $l_\mu l^\mu = n_\mu n^\mu = 0$.

Le vecteur de base $e_{(1)}$ est normé :

$$e_{(1)\mu} e_{(1)}^\mu = 1$$

Pour les autres le même calcul et l'utilisation des relations entre les vecteurs l, n, m, m^*

$$\begin{aligned} l.m &= l.m^* = n.m = n.m^* = 0 \\ l.l &= n.n = m.m = m^*.m^* = 0 \\ l.n &= 1 \text{ et } m.m^* = -1 \end{aligned}$$

nous donnent:

$$e_{(2)\mu} e_{(2)}^\mu = -1, \quad e_{(3)\mu} e_{(3)}^\mu = -1, \quad e_{(4)\mu} e_{(4)}^\mu = -1$$

Reste à vérifier que la base est orthogonale :

Calculons les produits scalaires :

$$e_{(1)\mu} e_{(2)}^\mu = e_{(2)\mu} e_{(1)}^\mu = + - [(e^\alpha l_\mu + e^{-\alpha} n_\mu) / \sqrt{2}] [(e^\alpha l^\mu - e^{-\alpha} n^\mu) / \sqrt{2}] = \\ [e^\alpha l_\mu e^\alpha l^\mu - e^{-\alpha} n_\mu e^{-\alpha} n^\mu - e^\alpha l_\mu e^{-\alpha} n^\mu + e^{-\alpha} n_\mu e^\alpha l^\mu] / 2 = (0 + 0 - 1 + 1) / 2 = 0 \\ e_{(3)\mu} e_{(4)}^\mu = e_{(4)\mu} e_{(3)}^\mu = -i. (m_\mu + m_\mu^*) (m^\mu - m^{\mu*}) / 2 = -i. (m_\mu m^\mu - m_\mu^* m^{\mu*} - m_\mu m^{\mu*} + m_\mu^* m^\mu) / 2 = 0 + 0 + 1 - 1 = 0$$

Pour les produits scalaires $e_1.e_3$, $e_1.e_4$, $e_2.e_3$, $e_2.e_4$, ils sont trivialement nuls, car ils sont une somme algébrique de produits tous nuls à savoir : $l.m$, $n.m$, $l.m^*$, $n.m^*$

Nous avons vérifié que cette base e_1, e_2, e_3, e_4 est bien orthonormée de signature $(+,-,-,-)$ satisfaisant la relation :

$$g_{\mu\nu} e_a^\mu e_b^\nu = \eta_{ab}$$

En calculant la tétrade $e_{(\mu)}^a$, où $\mu = \{t, \varphi, r, \theta\}$ avec $a = 0$, (boost nul) le calcul par mathématique donne:

$\frac{2a^2 + r(-2m + 3r) + a^2 \cos[2\theta]}{\sqrt{2}(a^2 + 2r^2 + a^2 \cos[2\theta])}$	$-\frac{r(2m + r) + a^2 \cos[2\theta]}{\sqrt{2}(a^2 + 2r^2 + a^2 \cos[2\theta])}$	$-\frac{a^2 \sin[2\theta]}{a^2 + 2r^2 + a^2 \cos[2\theta]}$	$-\frac{2ar \sin[\theta]}{a^2 + 2r^2 + a^2 \cos[2\theta]}$
$-\frac{a(2a^2 + r(-2m + 3r) + a^2 \cos[2\theta]) \sin[\theta]^2}{\sqrt{2}(a^2 + 2r^2 + a^2 \cos[2\theta])}$	$\frac{a(r(2m + r) + a^2 \cos[2\theta]) \sin[\theta]^2}{\sqrt{2}(a^2 + 2r^2 + a^2 \cos[2\theta])}$	$\frac{a(a^2 + r^2) \sin[2\theta]}{a^2 + 2r^2 + a^2 \cos[2\theta]}$	$\frac{2r(a^2 + r^2) \sin[\theta]}{a^2 + 2r^2 + a^2 \cos[2\theta]}$
$-\frac{r(2m + r) + a^2 \cos[2\theta]}{2\sqrt{2}(a^2 + r(-2m + 3r))}$	$\frac{a^2 + r(-2m + 3r) + 2a^2 \cos[\theta]^2}{2\sqrt{2}(a^2 + r(-2m + 3r))}$	0	0
0	0	r	$-a \cos[\theta]$

Cette forme peut se factoriser ¹²⁹ et se simplifier, mais on peut vérifier que la relation:

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab},$$

est satisfaite: L'indice grec est l'indice ligne qui donne l'indice du vecteur de la base $\hat{e}_{(\mu)}$ dans les coordonnées de Boyer Lindquist et l'indice latin de sommation est l'indice colonne de la tétrade qui donne les composantes de ce vecteur $\hat{e}_{(\mu)}$ dans les vecteurs $e_{(a)}$ de la base locale orthonormée.

Ainsi: $e_{(\mu=0)} = (\partial_t)^a$ est donné par la première ligne du tableau ci dessus.

Relations entre les vecteurs canoniques et vecteurs déduits du formalisme de Newmann Penrose.

Cette base étant orthonormée et différente de celle formée par les vecteurs canoniques V, W , et les vecteurs de base originaux $\partial_r, \partial_\theta$ qui étaient orthogonaux que nous avons utilisés précédemment dans ce chapitre, il est intéressant de comparer les deux, ce qui se fait facilement compte tenu de la définition de V et W .

$$V = (r^2 + a^2) \partial_t + a \partial_\varphi, \quad W = a \sin^2 \theta \partial_t + \partial_\varphi$$

Dans la base $(\partial_t, \partial_\varphi, \partial_r, \partial_\theta)$ on rappelle que les vecteurs de la base orthonormée sont définis par:

$e_1^\mu = + - (1/\sqrt{2}) \{ (r^2 + a^2)(e^\alpha/\Delta + e^{-\alpha}/2\rho^2),$	$a(e^\alpha/\Delta + e^{-\alpha}/2\rho^2),$	$\Delta(e^\alpha/\Delta - e^{-\alpha}/2\rho^2),$	$0\}$
$e_2^\mu = + - (1/\sqrt{2}) \{ (r^2 + a^2)(e^\alpha/\Delta - e^{-\alpha}/2\rho^2),$	$a(e^\alpha/\Delta - e^{-\alpha}/2\rho^2),$	$\Delta(e^\alpha/\Delta + e^{-\alpha}/2\rho^2),$	$0\}$
$e_3^\mu = (1/\rho^2) \{ a^2 \sin\theta \cos\theta,$	$a \cot\theta,$	$0,$	$r\}$
$e_4^\mu = (1/\rho^2) \{ r a \sin\theta,$	$r/\sin\theta,$	$0,$	$-a \cos\theta\}$

¹²⁹ Mathématique n'est pas très performant pour factoriser.

En utilisant les définitions de $V = (\partial_v)$ et $W = (\partial_w)$ ci dessus on obtient dans la base $(\partial_v, \partial_w, \partial_r, \partial_\theta)$:

$$\begin{aligned} e_1^\mu &= + (1/\sqrt{2}) \{ e^a/\Delta + e^{-a}/2\rho^2 \}, & 0, & \Delta(e^a/\Delta - e^{-a}/2\rho^2), & 0 \} \\ e_2^\mu &= + (1/\sqrt{2}) \{ (e^a/\Delta - e^{-a}/2\rho^2), & 0, & \Delta(e^a/\Delta + e^{-a}/2\rho^2), & 0 \} \\ e_3^\mu &= (1/\rho^2)(0, & \cotg\theta, & 0, & r) \\ e_4^\mu &= (1/\rho^2)(0, & r/\sin\theta, & 0, & -a.\cos\theta) \end{aligned}$$

Les deux premiers vecteurs e_1^μ, e_2^μ ne s'expriment qu'à partir de (∂_v, ∂_r) autrement dit ces quatres vecteurs sont dans le même plan. Les deux derniers e_3^μ, e_4^μ ne s'expriment qu'à partir de $(\partial_w, \partial_\theta)$ autrement dit ces quatres vecteurs sont aussi dans le même plan (différent du premier) mais cela montre le lien étroit entre ces vecteurs.

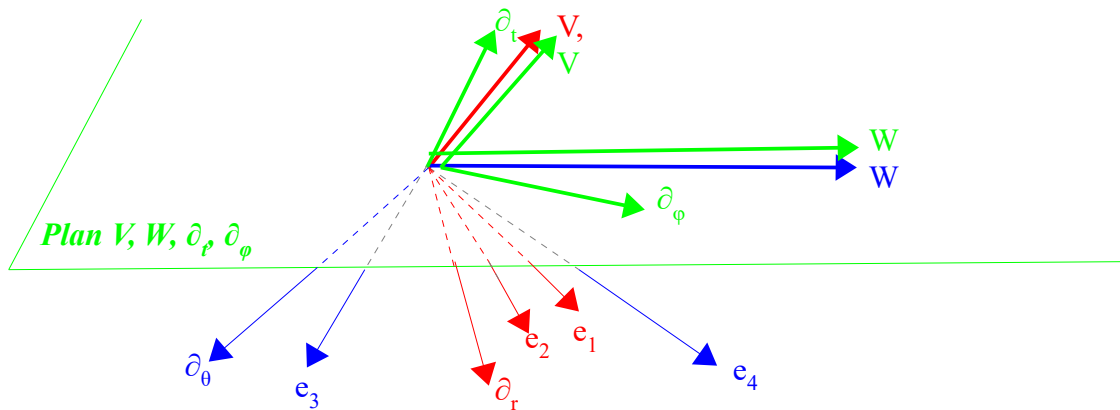


Figure 15B-2: Représentation symbolique des plans contenant les différents vecteurs. Les vecteurs de même couleur sont dans le même plan et de plus les 4 vecteurs en gras ($V, W, \partial_t, \partial_\phi$) sont aussi coplanaires, les vecteurs V, W appartenant à 2 plans ont deux couleurs. En fait la figure se réfère à 3 plans différents.

La caractéristique de la base orthonormée est qu'elle dérive des vecteurs nuls principaux mais que ses vecteurs de base ne sont pas orthogonaux aux vecteurs ∂_r et ∂_θ associés aux coordonnées de Boyer Lindquist, $((\partial_t)^a$ a des composantes non nulles dans les quatre vecteurs de la base $\hat{e}_{(a)}$) ceci à la différence des vecteurs canoniques V et W qui y sont orthogonaux mais ne sont pas orthonormés.

A ce titre les vecteurs canoniques V, W sont plus adaptés à l'étude des lignes d'univers à coordonnées radiales et azimutales constantes.

12- Relation entre les vecteurs de la tétrade nulle et ceux de la tétrade comobile

12-1 Relation entre les vecteurs de base

Réciproquement, on peut déduire que les vecteurs (l, n, m, m^*) de la base de Newman-Penrose sont une combinaison linéaire de ceux de la base orthonormée (e_1, e_2, e_3, e_4) définie ci-dessus.

En effet, à un facteur multiplicatif près on a :

$$l = e_1 + e_2, n = e_1 - e_2, m = e_3 + i.e_4, m^* = e_3 - i.e_4$$

Illustrons cela pour l, n par exemple:

Soit t la coordonnée temps et x une coordonnée d'espace, dans l'espace temps de Minkowski (2D).

Les coordonnées (t, x) de e_1, e_2 sont :

$$e_1 = (1,0)/\sqrt{2}, \quad e_2 = (0,1)/\sqrt{2}$$

les coordonnées de l, n sont :

$$l = (1,1), \quad n = (1,-1)$$

On voit que l est le vecteur nul correspondant à la propagation de la lumière dans le sens des x croissants, et n est le vecteur nul correspondant à la propagation de la lumière dans l'autre sens.

Il est facile de vérifier que les vecteurs l, n sont nuls et que le produit scalaire $l.n$ vaut 1.

12-2 Relation entre les boosts

Pour ce qui est du « boost » de paramètre α , dans la base de vecteurs nuls que nous avons introduit en (4-11-1) qui est particulier (on multiplie par e^α et $e^{-\alpha}$) nous pouvons maintenant le retrouver par les relations entre les bases nulles et la base tétradratique réelle comobile.

Nous avons réalisé ce boost dans le plan l, n ce qui associé à la transformation se répercute dans le plan e_1, e_2 .

Dans la base e_1, e_2 , un boost de « vitesse v » de paramètre α , tel que $v/c = \beta = \tanh \alpha$ se manifeste par la transformation de Lorentz bien connue et représentée par la matrice:

$$\begin{vmatrix} \cosh \alpha & -\sinh \alpha \\ -\sinh \alpha & \cosh \alpha \end{vmatrix}$$

ce qui donne :

$$e'_1 = e_1 \cosh \alpha - e_2 \sinh \alpha, \quad e'_2 = -e_1 \sinh \alpha + e_2 \cosh \alpha$$

La transformation :

$$l = e'_1 + e'_2, \quad n = e'_1 - e'_2$$

donne alors dans la base e_1, e_2 :

$$\begin{aligned} l &= e_1 (\cosh \alpha - \sinh \alpha) + e_2 (\cosh \alpha + \sinh \alpha) \\ n &= e_1 (\cosh \alpha + \sinh \alpha) - e_2 (\cosh \alpha - \sinh \alpha) \end{aligned}$$

Comme,

$$\begin{aligned} \cosh \alpha &= (e^\alpha + e^{-\alpha})/2 \quad \text{et} \quad \sinh \alpha = (e^\alpha - e^{-\alpha})/2, \\ \cosh \alpha - \sinh \alpha &= (e^\alpha + e^{-\alpha})/2 - (e^\alpha - e^{-\alpha})/2 = e^{-\alpha} \quad \text{et} \\ \cosh \alpha + \sinh \alpha &= (e^\alpha + e^{-\alpha})/2 + (e^\alpha - e^{-\alpha})/2 = e^\alpha \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned} l &= e_1 \cdot e^{-\alpha} + e_2 \cdot e^{-\alpha} \\ n &= e_1 \cdot e^\alpha - e_2 \cdot e^\alpha \end{aligned}$$

Inversons la relation, en multipliant la première ligne par e^α , la deuxième par $e^{-\alpha}$ et en additionnant et soustrayant les lignes, on obtient :

$$e_1 = l \cdot e^\alpha + n \cdot e^{-\alpha} \quad e_2 = l \cdot e^\alpha - n \cdot e^{-\alpha}$$

Ce qui est bien la relation que nous avons utilisé par anticipation.

C- Modèle de la rivière déduit de la forme de Doran en métrique de Kerr.

1- La forme de Doran de la métrique de Kerr

Avant de décrire la formulation tétradratique du modèle de la rivière, il est nécessaire d'introduire la forme de la métrique de Doran sur laquelle ce modèle s'appuie.

L'approche de Doran rejoint celle de Kerr, en cherchant à décrire la solution au moyen de coordonnées qui soient inertielles. Kerr s'était intéressé aux géodésiques nulles, Doran va s'intéresser aux géodésiques de type temps. Il va se servir de géodésiques radiales correspondant à un observateur en chute libre depuis l'infini sans vitesse ni moment cinétique propre initiaux. C'est le sens du changement de coordonnées qu'il propose.

Doran a donc développé une autre forme de la métrique de Kerr (Newmann) qui utilise des coordonnées également curvilignes correspondant à des géodésiques de type temps [58] et [56] pour une application particulière.

Il est instructif de comparer les deux approches.

Rappelons les éléments de la forme de Doran.

La forme de la métrique en coordonnées sphéroïdales s'écrit:

$$ds^2 = dt^2 - \left(\frac{\rho}{(r^2 + a^2)^{1/2}} dr + \alpha (dt - a \sin^2 \theta d\phi) \right)^2 - \rho^2 d\theta^2 - (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\phi^2.$$

En développant l'expression on obtient:

$$ds^2 = (1 - 2m.r/\rho^2) dt^2 - [\rho^2/(r^2 + a^2)] dr^2 - (a^2 \sin^4 \theta + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta) d\phi^2 - \rho^2 d\theta^2 + [4m.r.a.\sin^2 \theta/\rho^2] dt.d\phi - 2[2m.r/(r^2 + a^2)]^{1/2} dt.dr + 2[2m.r/(r^2 + a^2)]^{1/2} a.\sin^2 \theta.dr.d\phi$$

avec

$$\alpha = \frac{(2Mr)^{1/2}}{\rho} \quad \rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta.$$

et r donné implicitement ¹³⁰ par: $r^4 - r^2(x^2 + y^2 + z^2 - a^2) - a^2 z^2 = 0$

La solution est restreinte à $r > 0$, $r = 0$ représentant un disque.

La forme originelle de Kerr ¹³¹ s'écrit:

$$ds^2 = \rho^2 d\theta^2 - 2a \sin^2 \theta dr d\phi + 2dr du + \rho^{-2} [(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta] \sin^2 \theta d\phi^2 - 2a\rho^{-2} (2mr - e^2) \sin^2 \theta d\phi du - [1 - \rho^{-2} (2mr - e^2)] du^2$$

¹³⁰ Comme dans la solution de Kerr-Schild

¹³¹ Kerr R. 1963, « Gravitational field of a spinning mass as an example of Algebraically special metrics », Physical Review Letters, Vol 11, Nb 5.

où u est la coordonnée temporelle. Sur cette forme de Kerr la coordonnée r est de type nul. Mais les similitudes a¹³²vec la forme de Doran sont nombreuses.

Dans son article, Doran l'obtient à partir des coordonnées avancées d'Eddington Finkelstein¹³³ de la solution de Kerr (on remarque que la forme d'Eddington-Finkelstein est exactement la même que celle de Kerr¹³⁴).

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) dv^2 - 2 dv dr + \frac{2Mr}{\rho^2} (2a \sin^2 \theta) dv d\bar{\phi} + 2a \sin^2 \theta dr d\bar{\phi} - \rho^2 d\theta^2 - \left((r^2 + a^2) \sin^2 \theta + \frac{2Mr}{\rho^2} (a^2 \sin^4 \theta)\right) d\bar{\phi}^2, \quad ($$

en effectuant le changement de coordonnées suivant:

$$dt = dv - \frac{dr}{1 + (2Mr/(r^2 + a^2))^{1/2}}$$

$$d\bar{\phi} = d\phi - \frac{a dr}{r^2 + a^2 + (2Mr/(r^2 + a^2))^{1/2}}$$

Les transformations sont bien définies pour toutes les valeurs de r , bien que les intégrales ne semblent pas avoir une forme analytique simple (par exemple pour la coordonnée temps inertielle t on a¹³⁵:

$t - v =$

$$\frac{2}{-1+r} - r - \left(\sqrt{2} + \frac{2\sqrt{2}}{-1+r} + \sqrt{2} r \right) \sqrt{\frac{r}{1+r^2}} +$$

$$\frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{\frac{r}{1+r^2}} (1+r^2) (1+3r^2)} \left((-1-3r^2) \sqrt{r+r^3} \left(-\frac{6i\sqrt{ir}(-i+r)\sqrt{-i(i+r)} \operatorname{EllipticE}\left[\operatorname{ArcSin}\left[\frac{\sqrt{-i(i+r)}}{\sqrt{2}}\right], 2\right]}{\sqrt{i(-i+r)}\sqrt{r+r^3}} \right. \right.$$

$$\left. \frac{6\sqrt{ir}\sqrt{i(-i+r)}(i+r) \operatorname{EllipticF}\left[\operatorname{ArcSin}\left[\frac{\sqrt{-i(i+r)}}{\sqrt{2}}\right], 2\right]}{\sqrt{-i(i+r)}\sqrt{r+r^3}} + \right.$$

$$\left. \left. \frac{(4+4i)\sqrt{ir}\sqrt{(-i+r)(i+r)} \operatorname{EllipticPi}\left[1+i, \operatorname{ArcSin}\left[\frac{\sqrt{-i(i+r)}}{\sqrt{2}}\right], 2\right]}{\sqrt{r+r^3}} \right) \right) - 2 \operatorname{Log}[-1+r]$$

Le vecteur vitesse de la forme de Doran:

$$\dot{x}^i = (1, -a(r^2 + a^2)^{1/2}/\rho, 0, 0) \quad \dot{x}_i = (1, 0, 0, 0)$$

définit une géodésique entrante à θ et Φ constants, sa vitesse est nulle à l'infini.

Dans la solution de Doran la coordonnée temps, comme le vecteur vitesse covariant l'indique¹³⁶, est le temps propre d'un observateur en chute libre « radiale » à θ et Φ constant, partant à vitesse nulle à l'infini.

¹³² Doran fait remarquer que si cette transformation est bien définie pour toute valeur de r , les intégrales donnant les valeurs des coordonnées ne semblent pas avoir de solutions analytiques simples.

¹³³ Elles mêmes définies à partir des coordonnées « obloïdes » de Boyer Lindquist.

¹³⁴ Il est étonnant que Doran ne le mentionne pas!

¹³⁵ Obtenu par Mathematica 4 pour GM=a=1 par `tff = Integrate[-1 / (1 + (Sqrt[(2 * r) / (r^2 + 1)])), r]`

¹³⁶ Car les composantes des vecteurs quadrivitesse contra et covariantes montrent que, $x^i x_i = (dt/du)^2 = 1 \rightarrow dt = du$.

Si dans cette solution pour la géodésique radiale, on ne considère plus une vitesse nulle à l'infini, la forme n'est plus conservée, mais lorsqu'on fait tendre cette vitesse vers la vitesse de la lumière (géodésique lumière « radiale ») on tend vers la forme de Eddington Finkelstein. Ceci explique que r soit une coordonnée de type nul dans la forme de Kerr (Eddington Finkelstein).

On voit que dans cette solution de Doran, on définit directement des coordonnées globales à partir d'autres coordonnées globales.

La coordonnée temps t de Doran est définie à partir de la coordonnée temps des coordonnées avancées et d'une fonction¹³⁷ de la coordonnée radiale commune r .

De même la coordonnée azimutale Φ de Doran est définie à partir de la coordonnée azimutale avancée et de la coordonnée radiale commune r . On note que cette forme n'est pas diagonale. Par contre, du fait du caractère géodésique des coordonnées, elle possède des propriétés très intéressantes notamment sous sa forme en coordonnées cartésiennes qui font l'objet de [56].

2- Le modèle de la rivière

2- 1 Généralités

Le but de cet article est de montrer que dans les espaces temps stationnaires de Schwarzschild, Reisner Nordström et Kerr ou Kerr Newmann¹³⁸ le mouvement géodésique de particules réelles (ou de la lumière) tel qu'il est décrit, de façon covariante, par l'équation géodésique dans les coordonnées globales, peut dans cette forme particulière de la métrique (forme cartésienne de Doran) être décrit comme la composition du mouvement classique d'une « rivière d'espace » dans un espace de fond plat¹³⁹ et du mouvement géodésique par rapport à cette rivière¹⁴⁰, en Relativité restreinte¹⁴¹ de la particule entraînée par la rivière. On définira donc localement une tétrade où la particule sera décrite.

Intéressons nous au traitement mathématique du problème¹⁴². Doran (2000) a souligné que la métrique de Kerr-Newman pour un trou noir en rotation de moment angulaire par unité de masse a (si $a > 0$ le trou noir tourne autour son axe vers la droite) peut s'écrire en coordonnées sphéroïdales obloïdes $(t_{\text{H}}, r, \theta, \phi_{\text{H}})$ sous la forme :

$$ds^2 = -dt_{\text{H}}^2 + \left[\frac{\rho dr}{R} + \frac{\beta R}{\rho} (dt_{\text{H}} - a \sin^2 \theta d\phi_{\text{H}}) \right]^2 + \rho^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\phi_{\text{H}}^2 \quad (23)$$

où $\beta(r)$ est la vitesse de la rivière,

$$R \equiv (r^2 + a^2)^{1/2}, \quad \rho \equiv (r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^{1/2}, \quad (24)$$

le temps chute libre t_{ff} et l'angle azimutal en chute libre Φ_{ff} sont liés aux coordonnées t et Φ de Boyer Lindquist par¹⁴³ :

¹³⁷ Ces fonctions de r ne s'intègrent pas simplement.

¹³⁸ Ce dernier cas étant le plus général et incluant tous les autres.

¹³⁹ Non relativiste, avec cependant la coordonnée temps qui est le temps propre de la particule, ce qui est autorisé dans ce contexte classique de cet espace et temps non physiques (fictifs), car le temps est une variable indépendante de l'espace, et rien ne s'oppose à ce qu'on prenne le temps propre de la particule qui est un paramètre affine de sa ligne d'univers qui caractérise son mouvement, comme variable de temps.

¹⁴⁰ Mouvement propre de la particule.

¹⁴¹ Localement autour d'un point de la rivière, décrit dans une base tétradratique très particulière.

¹⁴² La numérotation des équations est celle de [58]

$$t_{\text{ff}} = t - \int_{r_*}^{\infty} \frac{\beta dr}{1 - \beta^2} \quad (25)$$

$$\phi_{\text{ff}} = \phi - a \int_{r_*}^{\infty} \frac{\beta dr}{R^2(1 - \beta^2)} \quad (26)$$

Comme précédemment nous avons supposé que $\beta > 0$ pour un trou noir (chute entrante) et $\beta < 0$ pour un trou blanc (flux sortant). Les horizons¹⁴⁴ se produisent (voir III D) quand la vitesse β de la rivière est égale à la vitesse de la lumière.

$$\beta = \pm 1 \quad (27)$$

Avec $\beta = 1$ pour les horizon des trous noirs et $\beta = -1$ pour les horizons des trous blancs. Les ergosurfaces (limites des ergosphères) se produisent là où $ds^2 = 0$ à $dr = d\theta = d\phi_{\text{ff}} = 0$, ce qui se produit pour :

$$\beta = \pm \frac{\rho}{R} \quad (28)$$

avec $\beta = \rho/R$ pour les ergosphères de trous noirs et $\beta = -\rho/R$ pour les ergosphères de trous blancs¹⁴⁵. Pour un trou noir de Kerr- Newman de masse M et de charge Q , la vitesse de la rivière β est¹⁴⁶ :

$$\beta(r) = \frac{(2Mr - Q^2)^{1/2}}{R} \quad (29)$$

mais pour le propos qui nous concerne la vitesse de la rivière peut être considérée comme une fonction plus générale de la coordonnée r . Remarquons que la vitesse de la rivière β définie ici¹⁴⁷ diffère de celle définie par Doran [35] par un facteur ρ/R . La vitesse définie par Doran est la longueur $(\beta_{\mu}\beta^{\mu})^{1/2} = \beta R/\rho$ du vecteur vitesse β^{μ} donné par l'équation (31) ci dessous, un choix apparemment naturel. Ici nous avons fait en sorte que $\beta(r)$ soit une fonction de r seulement ne dépendant pas de θ via $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$. De plus, avec la convention que nous avons adopté, la vitesse de la rivière vaut ± 1 sur les horizons (équation 27), comme nous démontrerons § IIID.

Si la vitesse de la rivière β est nulle, alors la métrique (23) se réduit à une métrique d'espace plat en coordonnées sphériques obloïdes. Cependant, à la différence du cas sphérique, la métrique n'est pas plate sur les hypersurfaces à temps « chute libre » constant, $dt_{\text{ff}} = 0$.

2-2 Métrique cartésienne de Doran

Les § III F et III I vont nous montrer que le système de coordonnées de Doran va nous fournir les coordonnées du fond plat dans lequel la rivière coule. Nous écrivons la forme de la métrique de Doran en utilisant des coordonnées de type cartésien¹⁴⁸ déduite des coordonnées de type sphérique :

¹⁴³Notons que dans les équations (25) et (26) l'expression dans l'intégrale diverge pour $\beta = \pm 1$. Les coordonnées $\Phi_{\text{ff}}(t, r)$ et $t_{\text{ff}}(t, r)$ sont singulières sauf si pour $\beta = \pm 1$, les coordonnées $t(r)$ et $\Phi(r)$ divergent également, ce qui est le cas dans la forme de Boyer Lindquist, auquel cas la différence peut être finie.

¹⁴⁴ Comme pour les trous noirs de Reissner Nordström, les trous noirs en rotation ont deux horizons (externe et interne) correspondant à une même valeur de β . Les trous blancs aussi par symétrie.

¹⁴⁵ Les trous noirs en rotation ont deux ergosphères correspondant à la même valeur de β (externe et interne, cf O'Neil). Les trous blancs aussi par symétrie.

¹⁴⁶ La forme de (29) est similaire à celle de (4) avec R défini par (24) à la place de r .

¹⁴⁷ La quadri vitesse dans ces coordonnées (t, r, θ, Φ) s'écrit, avec $\beta = (2mr)^{1/2}/R$, $v_{\text{ff}}^{\mu} = (1, -\beta R^2/\rho^2, 0, 0)$. Vérifions que $v_{\text{ff}}^{\mu} \cdot v_{\text{ff}\mu} = -1$. Calculons $v_{\text{ff}\mu} = v_{\text{ff}}^{\nu} \cdot g_{\nu\mu} = v_{\text{ff}}^t \cdot g_{tt} + v_{\text{ff}}^r \cdot g_{tr} + v_{\text{ff}}^{\theta} \cdot g_{r\theta} + v_{\text{ff}}^{\Phi} \cdot g_{\Phi r} + v_{\text{ff}}^{\theta} \cdot g_{\theta r} + v_{\text{ff}}^{\Phi} \cdot g_{\Phi\theta} = ([-1 + \beta^2 R^2/\rho^2 - \beta^2 R^2/\rho^2, (-\beta R^2/\rho^2)\rho^2/R + \beta, 0, +a\beta^2 \sin^2 \theta R^2/\rho^2 - a\beta^2 \sin^2 \theta R^2/\rho^2] \rightarrow v_{\text{ff}\mu} = (-1, 0, 0, 0)$. La forme de $v_{\text{ff}\mu}$ dans ce référentiel montre que t est le temps propre.

¹⁴⁸ La forme qui est cartésienne, mais elle est déduite des coordonnées de type sphérique où la coordonnée azimutale Φ_{ff} n'est pas la coordonnée azimutale classique Φ des coordonnées de Boyer Lindquist (Φ_{ff} varie en fonction de r).

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t_H, x, y, z) = (t_H, R \sin \theta \cos \phi_H, R \sin \theta \sin \phi_H, r \cos \theta)$$

L'axe de rotation est l'axe de la coordonnée z . La forme de la métrique s'écrit alors :

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} (dx^\mu - \beta^\mu \alpha_\kappa dx^\kappa) (dx^\nu - \beta^\nu \alpha_\lambda dx^\lambda) . \quad (30) \quad 149$$

Ici les composantes de la vitesse β^μ de la rivière sont:

$$\beta^\mu = \frac{\beta R}{\rho} \left(0, -\frac{xr}{R\rho}, -\frac{yr}{R\rho}, -\frac{zR}{r\rho} \right) \quad (31)$$

et $\alpha_\mu dx^\mu = dt_H - a \sin^2 \theta d\phi_H$ ont pour composantes :

$$\alpha_\mu = \left(1, \frac{ay}{R^2}, -\frac{ax}{R^2}, 0 \right) . \quad (32)$$

Le vecteur α_μ est relié à la quadri vitesse à l'horizon, équation (46), et nous y ferons référence en tant que vecteur azimutal, du fait que ses composantes spatiales pointent dans la direction azimutale (négative), dans la direction opposée à la rotation du trou noir. La coordonnée radiale sphéroïde r est définie implicitement en terme des coordonnées x, y, z par¹⁵⁰:

$$r^4 - r^2(x^2 + y^2 + z^2 - a^2) - a^2 z^2 = 0 . \quad (33)$$

2-3 Tétrade de la rivière

Modéliser les trous noirs, comme un flot « entrant » d'une rivière d'espace¹⁵¹, conduit naturellement à utiliser le formalisme tétradique¹⁵². Soit g_μ la base de vecteurs tangents dans le système de coordonnées cartésiennes de Doran x^μ , et soit γ_m avec ses coordonnées locales associées

$\xi^m = (\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$ un système de tétrades localement inertielles attaché aux observateurs en chute libre « radiale » depuis l'infini, sans vitesse ni moment angulaire initial. De tels observateurs en chute libre sont comobiles du flot de la rivière d'espace. Ils tombent sur des trajectoires à θ et Φ_H constants, et ont des quadri vitesses $v^\mu_H = (1, \beta^1, \beta^2, \beta^3)$ dans le système de coordonnées cartésien de Doran. La métrique $g_{\mu\nu}$ est constituée par le produit scalaire des vecteurs tangents g_μ en chaque point, équation (10) tandis que le produit scalaire des vecteurs de base de la tétrade γ_m donne la métrique de Minkowski, équation (12).

¹⁴⁹On note la forme pseudo minkowskienne de (30). Compte tenu de la relation $g_{\mu\nu} = e_\mu^m e_\nu^n \eta_{mn}$ reliant une base tétradique orthonormée à la métrique, l'équation (30) nous suggère la base tétradique obtenue en posant $e_\mu^m = \delta_\mu^m - \beta^m \alpha_\mu$ avec les valeurs de β^m et α_μ données par (31) et (32). Comme les vecteurs α et β sont orthogonaux (produit scalaire nul), cette forme s'inscrit dans la démarche de Kerr (bien que cette forme soit différente de celle de Kerr Schild) qui cherchait une métrique qui était la somme d'une métrique de Minkowski et du produit tensoriel d'un vecteur nul par lui même. Ici c'est une combinaison de produit tensoriel de deux vecteurs (dont le produit scalaire est nul) qui est utilisée (ce qui est plus général). Ce point a été souligné par Doran dans [35] qui a en d'ailleurs fait une analyse plus détaillée en indiquant les relations de ces vecteurs avec les vecteurs nuls principaux de la solution de Kerr. En particulier les coordonnées covariantes du vecteur α de cet article sont celles du vecteur ν de Doran et les coordonnées contravariantes de β de cet article sont à un facteur multiplicatif près celles covariantes du vecteur α de Doran. Toutefois la formulation hybride de cette métrique cartésienne, les équations (30)-(32) utilisant indépendamment des coordonnées cartésiennes t, x, y, z , les fonctions r et R des coordonnées cartésiennes x, y, z définies implicitement par (33), rend délicate l'expression homogène dans ces coordonnées cartésiennes de ces équations ainsi que les calculs directs des symboles de Christofel et du tenseur de Riemann. Son expression développée est donnée en annexe E.

¹⁵⁰ Par la même relation que pour les coordonnées de Kerr- Schild.

¹⁵¹ Dans ces coordonnées

¹⁵² Pour les trous noirs de Kerr ce formalisme est largement utilisé, en particulier avec une tétrade nulle (formalisme de Newman- Penrose)

Supposons, sans perte de généralité, que les vecteurs γ_m de la base tétradratique sont alignés avec g_μ , ceux du référentiel cartésien de Doran à l'infini. Alors la base tétradratique γ_m et la base g_μ de Doran satisfont, comme Doran l'a remarqué (2000) [35], en tout point à la relation¹⁵³ :

$$\begin{aligned}\gamma_{t_\infty} &= g_{t_\infty} + \beta^z g_z \\ \gamma_x &= g_x + \alpha_x \beta^z g_z \\ \gamma_y &= g_y + \alpha_y \beta^z g_z \\ \gamma_z &= g_z\end{aligned}\quad (34)$$

Ceci peut se vérifier en constatant que le produit scalaire des γ_m ainsi construit donne la métrique de Minkowski et que leurs dérivées s'annulent le long des lignes d'univers des observateurs en chute libre sans vitesse initiale à l'infini, $v_\infty^\mu \partial \gamma_m / \partial x^\mu = 0$.¹⁵⁴

Si on développe la métrique cartésienne de Doran (avec les notations du texte¹⁵⁵):

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} (dx^\mu - \beta^\mu \alpha_\kappa dx^\kappa) (dx^\nu - \beta^\nu \alpha_\lambda dx^\lambda) \quad (30)$$

(avec $i=1=x, i=2=y, i=3=z$) sous forme matricielle (t, x, y, z):

$$\begin{vmatrix} 1 - \Sigma_i \beta^i{}^2 & -\beta^x + (ay/R^2) \Sigma_i \beta^i{}^2 & -\beta^y - (ax/R^2) \Sigma_i \beta^i{}^2 & -\beta^z \\ -\beta^x + (ay/R^2) \Sigma_i \beta^i{}^2 & 1 - 2\beta^x ay/R^2 + (ay/R^2)^2 \Sigma_i \beta^i{}^2 & (\beta^x ax - \beta^y ay)/R^2 - (a^2 xy/R^4) \Sigma_i \beta^i{}^2 & -\beta^z ay/r^2 \\ -\beta^y - (ax/R^2) \Sigma_i \beta^i{}^2 & (\beta^x ax - \beta^y ay)/R^2 - (a^2 xy/R^4) \Sigma_i \beta^i{}^2 & 1 + (2ax/R^2) \beta^y + (ax/R^2)^2 \Sigma_i \beta^i{}^2 & \beta^z ax/r^2 \\ \beta^z & -\beta^z ay/r^2 & \beta^z ax/r^2 & 1 \end{vmatrix}$$

Compte tenu de la relation $g_{\mu\nu} = e_\mu^m e_\nu^n \eta_{mn}$ reliant une base tétradratique orthonormée à la métrique, l'équation (30) nous suggère la base tétradratique obtenue en posant:

$$e_\mu^m = \delta_\mu^m - \beta^m \alpha_\mu$$

avec les valeurs de β^m et α_μ données par (31) et (32).

La rivière est caractérisée par un champ ω_{km} , donné par les équations (72) et (73) qui dans ce contexte se réduit au gradient d'un bivecteur, ce qui permet sa représentation dans un contexte d'espace formel plat (non physique). La variation de ce bivecteur dans la rivière se traduit (par effet de marée selon les termes des auteurs) par des boosts et des rotations de Lorentz de la particule.

En développant, ce champ ω_{km} , (k indice colonne, m ligne), s'écrit avec les notations du texte:

$$\begin{vmatrix} 0 & \beta x r / \rho^2 & \beta y r / \rho^2 & \beta z R^2 / r \rho^2 \\ -\beta x r / \rho^2 & 0 & ar(x^2 + y^2) \beta / R^2 \rho^2 - \zeta & ayz \beta / r \rho^2 - \zeta \\ -\beta y r / \rho^2 & -ar(x^2 + y^2) \beta / R^2 \rho^2 + \zeta & 0 & -axz \beta / r \rho^2 - \zeta \\ -\beta z R^2 / r \rho^2 & -ayz \beta / r \rho^2 + \zeta & axz \beta / r \rho^2 + \zeta & 0 \end{vmatrix}$$

On note l'antisymétrie du bivecteur (il n'y a que 6 composantes à calculer).

Les coefficients de rotation de Ricci s'obtiennent par dérivation par rapport à x, y, z (les dérivées par rapport à t sont nulles) de ces composantes conformément à l'équation (71).

¹⁵³ Notons que le vecteur de base tétradratique temporel est le même (à la définition de β près) que dans les trous noirs sphériques, mais que les vecteurs de base tétradriques spatiaux subissent une transformation). Ici la base tétradratique γ_m est définie de façon plus complexe, les vecteurs subissant un shift de β et une rotation de α .

¹⁵⁴ Equation du transport parallèle.

¹⁵⁵ Forme hybride car rappelons le, r et R sont des fonctions implicites (33) des coordonnées cartésiennes!

La présence de la fonction implicite $r(x,y,z)$ et de $R = (r^2+a^2)^{1/2}$, directement ou dans β , ρ et ζ ne rend pas l'opération de dérivation très simple.

On voit que la méthode est « hybride » donc il convient bien de distinguer dans la démonstration ce qui relève de la relativité générale « strico sensu » de ce qui relève d'hypothèses qui sont spécifiques.

En effet, il convient de vérifier que cette méthode est bien équivalente à la méthode classique covariante, puisque les auteurs revendiquent la totale compatibilité avec la relativité générale, l'intérêt du modèle ne résidant que dans sa présentation du problème et des solutions, et non pas dans le résultat.

Comme les auteurs utilisent essentiellement les mathématiques de la relativité générale (équation géodésique, tétrades) pour établir les équations qui vont être utilisées, dans le contexte d'un référentiel particulier et d'une tétrade particulière dans ce référentiel, cela coule de source pour cette partie.

Pour la partie spécifique qui fait que le modèle est hybride, elles n'influent pas sur le corps de la démonstration. Ce sont soit des considérations annexes qui sont mentionnées mais non utilisées pour dériver les équations (montrer que la tétrade est transportée parallèlement le long de la géodésique dans un espace plat) soit des considérations spécifiques à la représentation qui est proposée comme par exemple l'application bijective entre les coordonnées de l'espace courbe physique et celles de l'espace temps plat fictif qui est utilisé dans le modèle de la rivière mais qui est quelque chose d'accessoire (extension) propre à cette description.

Cette distinction n'est pas toujours faite de façon explicite.

Le point particulier qu'ils exploitent est dû à la forme de la métrique cartésienne de Doran dans laquelle s'exprime la base tétradratique particulière choisie qui produit des coefficients de rotation de Ricci très simples pour l'équation géodésique (61) de la base tétradratique: les termes non linéaires s'éliminent, ce qui va les réduire à un gradient ordinaire d'un bivecteur, équations (71) et (72), permettant sa transposition dans un espace plat via les coordonnées¹⁵⁶.

La rivière s'écoule alors, en accélérant et tourbillonnant, dans un espace fictif plat, qui ne sert qu'à la représentation du modèle, mis en correspondance bi univoque avec l'espace physique courbe au moyen des coordonnées.

On voit alors que bien que l'espace décrit ne soit pas plat (la métrique n'est pas plate), on peut en définir une image, via les coordonnées, qui elle est plate.

Ceci ne vaut que dans ce système de coordonnées et dans la base tétradratique utilisée, bien entendu!

Notons la similitude avec l'étude de la déviation géodésique de la congruence de géodésiques radiales entrantes sans vitesse initiale ni moment angulaire initial qui donnerait le même résultat, ces géodésiques, considérées comme des lignes de contrainte pour le fluide incompressible qu'est l'espace temps¹⁵⁷, « traçant » une carte de la rivière, carte qu'on pourrait sans doute représenter plate dans les référentiels particuliers utilisés par les auteurs¹⁵⁸.

Ce point sera développé au paragraphe suivant.

¹⁵⁶Ce point est explicité dans le texte au chapitre F.

¹⁵⁷Lorsque les lignes de contrainte se resserrent, le fluide étant incompressible sa vitesse ne peut qu'augmenter. De même la disposition de ces lignes permet de représenter une rotation (torsion) locale (et éventuellement un cisaillement) comme l'étude des congruences de géodésiques l'indique.

¹⁵⁸ On sait qu'il existe des référentiels particuliers dans lesquels le tenseur de Riemann (ou de Weyl, dans le vide, pour Schwarzschild et Kerr) prend une forme très simple: un seul scalaire (complexe) de Weyl n'est pas nul. Par exemple dans le formalisme de Newman Penrose, dans la base tétradratique nulle associée l, n, m, m^* , le tenseur de Weyl n'a que 2 composantes non nulles (C_{lnln} et C_{lnmm^*}).

Les auteurs ont fait une approche différente, estimant que l'image de la rivière est plus intuitive (ne nécessite pas le pré-requis de la déviation géodésique) et permet de mieux décrire et comprendre la phénoménologie de ces trous noirs.

Le modèle de la rivière des trous noirs à symétrie sphérique est traité au début de l'article, mais pas de façon indépendante puisqu'on utilise des résultats qui seront établis pour les trous noirs de Kerr.

Nous avons vu dans les annexes C et D que ces trous noirs sphériques, qui sont plus simples permettent d'illustrer quelques concepts fondamentaux utilisés dans l'article, cependant le cas des trous noirs en rotation est plus complexe et les concepts que nous avons utilisés apparaissent alors comme des cas particuliers d'une méthode plus générale.

3- Congruences de géodésiques ¹⁵⁹

3- 1 Généralités

Dans le modèle de la rivière, les observateurs associés à la rivière suivent des géodésiques à θ et Φ_{ff} ¹⁶⁰constant, de quadri vitesse:

$$v_{ff}^{\mu} = (1, \beta^1, \beta^2, \beta^3)$$

(1)

avec les conventions du texte.

Dans l'étude des congruences de géodésiques (de type temps) on définit un tenseur:

$$B^{\mu}_{\nu} = v_{ff}^{\mu} ;_{\nu}$$

(2)

qui permet de définir par sa version covariante: $B_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda} B^{\lambda}_{\nu} = g_{\mu\lambda} v_{ff}^{\lambda} ;_{\nu} = v_{ff\mu} ;_{\nu}$ la relation:

$$B_{\mu\nu} = \frac{1}{3} \cdot \theta \cdot P_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}$$

(3)

où

$$P_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda} P^{\lambda}_{\nu} = g_{\mu\lambda} (\delta^{\lambda}_{\nu} + v_{ff}^{\lambda} v_{ff\nu}) = g_{\mu\nu} + v_{ff\mu} v_{ff\nu}$$

(4)

avec le tenseur de projection:

$$P^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + v_{ff}^{\mu} v_{ff\nu}$$

Dans cette relation (3) θ ¹⁶¹ définit l'expansion de la congruence qui est un scalaire, σ définit son anisotropie (cisaillement) qui est un tenseur symétrique de trace nulle ¹⁶² et ω sa rotation qui est un tenseur antisymétrique par construction .

On voit que tous ces éléments se calculent à partir de la quadri vitesse v_{ff}^{μ} et de la métrique, ce qui se comprend puisque le champ de vecteurs quadri vitesse définit les caractéristiques de l'espace (de la rivière pour utiliser le langage des auteurs de l'article).

On peut déduire de (3):

$$\begin{aligned} \theta &= P^{\mu\nu} B_{\mu\nu} = v_{ff}^{\mu} ;_{\mu} \\ \sigma_{\mu\nu} &= B_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \cdot \theta \cdot P_{\mu\nu} \end{aligned}$$

¹⁵⁹ Pour une présentation voir par exemple Appendix F de « Spacetime and geometry » de Sean M Carroll (Pearson Addison Wesley- 2003)

¹⁶⁰ Dans le cas des trous noirs sphériques Φ_{ff} vaut simplement Φ et la définition de β est différente.

¹⁶¹ Attention à la notation, θ n'est pas la coordonnée angulaire mais le facteur d'expansion!

¹⁶² L'équation (4) montre sa symétrie, pour vérifier que la trace est nulle on développe $\sigma^{\mu}_{\nu} = B^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{3} \cdot \theta \cdot P^{\mu}_{\nu}$ et on contracte pour calculer la trace en posant $\mu = \nu$. Il vient : $\sigma^{\mu}_{\mu} = B^{\mu}_{\mu} - \frac{1}{3} \cdot \theta \cdot P^{\mu}_{\mu}$. En utilisant les relations ci dessus et en utilisant $v_{ff}^{\mu} v_{ff\mu} = -1$, on obtient $\sigma^{\mu}_{\mu} = \theta - \frac{1}{3} \cdot \theta \cdot [4 + (-1)] = 0$.

$$(5) \quad \omega_{\mu\nu} = B_{[\mu\nu]}$$

Ces éléments ne sont pas forcément très simples à calculer.

3-2 Calcul de l'équation du transport parallèle en coordonnées cartésiennes globales¹⁶³

Remarquons la forme vectorielle de l'équation

$$v^\mu \partial \gamma_m / \partial x^\mu = 0 \quad (13)$$

avec

$$\gamma_m = \gamma_m^\mu g_\mu$$

D'après le principe d'équivalence un vecteur p non accéléré (chute libre) reste au repos dans son référentiel (localement inertiel), sa dérivée par rapport au temps propre est nulle ($dp/d\tau = 0$).

Les vecteurs γ_m sont donc transportés sans accélération si $d\gamma_m/d\tau = 0$, condition qui est imposée par définition de la base tétradratique « localement inertielle attachée à l'observateur en chute libre radiale ». Montrons que la condition peut s'écrire sous la forme de l'équation (13).

La condition $d\gamma_m/d\tau = 0$ est équivalente à $u^n \partial_n \gamma_m = 0$ d'après l'éq. (50), dans la base tétradratique où les coordonnées d'un vecteur sont x^n avec $u^n = dx^n/d\tau$. Dans le référentiel comobile de la rivière $u^n = (1, 0, 0, 0)$, comme $u^n \partial_n = v^\mu \partial/\partial x^\mu$ (d'après l'équation (50) où v^μ et $\partial/\partial x^\mu$ sont respectivement la quadrivitesse et la dérivée en coordonnées globales).

L'équation $d\gamma_m/d\tau = 0$ est donc bien identique à $v^\mu \partial \gamma_m / \partial x^\mu = 0$.

Vérifions qu'avec la définition de l'éq. (14) des vecteurs de cette base cette condition est bien satisfaite, pour cela utilisons l'équation des coordonnées du transport parallèle d'un vecteur v qui s'écrit $dv^\mu/d\lambda + \Gamma^\mu_{\sigma\rho} v_{ff}^\sigma v_{ff}^\rho = 0$.

L'équation (14) montre que $\gamma_0 = v_{ff}$, l'équation s'écrit:

$$dv_{ff}^\mu/d\lambda + \Gamma^\mu_{\sigma\rho} v_{ff}^\sigma v_{ff}^\rho = 0.$$

Comme v_{ff} est le vecteur tangent à la géodésique cette équation est manifestement satisfaite.

Pour les vecteurs $\gamma_i = g_i$, l'équation s'écrit:

$$dg_i^\mu/d\lambda + \Gamma^\mu_{\sigma\rho} g_i^\sigma v_{ff}^\rho = \Gamma^\mu_{i\rho} g_i^\rho v_{ff}^\rho = 0,$$

car

$$dg_i^\mu/d\lambda = 0 \text{ et } g_i^\sigma = \delta_i^\sigma,$$

En utilisant mathématique 4, on peut vérifier que l'équation du transport parallèle est bien vérifiée pour tous les vecteurs $\gamma_m =$ de la base tétradratique.

3-3 Calcul de l'équation du transport parallèle dans la base tétradratique.

De ce qui précède on rappelle que dire que les vecteurs γ_m sont transportés parallèlement signifie que:

$$d\gamma_m/d\tau = 0$$

Ce qui est équivalent à:

$$u^n \partial_n \gamma_m = 0$$

¹⁶³La numérotation des équations est celle de l'article sur le modèle de la rivière.

dans la base tétradratique où les coordonnées d'un vecteur sont x^n

avec: $u^n = dx^n / d\tau$

et avec dans le référentiel comobile de la rivière: $u^n = (1, 0, 0, 0)$

3-4 Application aux trous noirs de Kerr

Mais dans les trous noirs en rotation rien à priori n'impose qu'ils soient nuls. Pour ces trous noirs en rotation on sait que les congruences de géodésiques de type lumière correspondant aux deux directions principales nulles ont une anisotropie nulle (voir l'article fondateur de Kerr de 1963), il semble alors possible qu'il soit de même pour la congruence de géodésiques de type temps considérée dans l'article (celle correspondant aux observateurs de Painlevé immobiles par rapport à la rivière), par contre pour la rotation rien n'est dit.

On devrait donc retrouver par cette méthode ¹⁶⁴ les vecteurs de shift et de rotation qui ont été calculés dans l'article.

Faisons le calcul dans le cas de la forme de Doran-Hamilton en coordonnées sphériques (23).

La quadri vitesse dans ces coordonnées (t, r, θ, Φ) s'écrit, avec $\beta = (2mr)^{1/2} / R$:

$$v_{ff}^\mu = (1, -\beta R^2/\rho^2, 0, 0) \quad (1')$$

Vérifions que $v_{ff}^\mu \cdot v_{ff\mu} = -1$

Calculons

$$v_{ff\mu} = v_{ff}^\nu \cdot g_{\nu\mu} = v_{ff}^t \cdot g_{tt} + v_{ff}^r \cdot g_{rt} + v_{ff}^r \cdot g_{rr} + v_{ff}^t \cdot g_{rt} + v_{ff}^r \cdot g_{\Phi r} + v_{ff}^t \cdot g_{\Phi t} =$$

$$(-1 + \beta^2 \cdot R^2/\rho^2 - \beta^2 \cdot R^2/\rho^2, (-\beta \cdot R^2/\rho^2)\rho^2/R + \beta, 0, +a \cdot \beta^2 \cdot \sin^2\theta \cdot R^2/\rho^2 - a \cdot \beta^2 \cdot \sin^2\theta \cdot R^2/\rho^2)$$

$$v_{ff\mu} = (-1, 0, 0, 0)$$

La forme de $v_{ff\mu}$ dans ce référentiel est très simple (comme dans la forme de Painlevé)

Il est alors facile de vérifier que $v_{ff}^\mu \cdot v_{ff\mu} = -1$

Calcul de l'expansion de la congruence.

$$v_{ff}^\mu{}_{;\mu} = v_{ff}^t{}_{;t} + v_{ff}^r{}_{;r} + v_{ff}^\theta{}_{;\theta} + v_{ff}^\Phi{}_{;\Phi} =$$

$$\partial_t v_{ff}^t + \Gamma_{t\mu}^t v_{ff}^\mu + \partial_r v_{ff}^r + \Gamma_{r\mu}^r v_{ff}^\mu + \partial_\theta v_{ff}^\theta + \Gamma_{\theta\mu}^\theta v_{ff}^\mu + \partial_\Phi v_{ff}^\Phi + \Gamma_{\Phi\mu}^\Phi v_{ff}^\mu$$

Calculons les différentielles partielles d'abord.

$$\partial_t v_{ff}^t = 0$$

$$\partial_\Phi v_{ff}^\Phi = 0$$

$$\partial_\theta v_{ff}^\theta = 0$$

$$\partial_r v_{ff}^r = \partial_r \left\{ -[2m \cdot r \cdot (r^2 + a^2)]^{1/2} / (r^2 + a^2 \cos^2\theta) \right\} =$$

$$2r \cdot (2mr(a^2 + r^2))^{1/2} / (a^2 \cos^2\theta + r^2)^2 - 2mr^2 + m(a^2 + r^2) / (2mr(a^2 + r^2))^{1/2} (a^2 \cos^2\theta + r^2)$$

Calculons les symboles de Christoffel non nuls liés à la courbure:

$$\Gamma_{tt}^r = 2m^2 r (r^2 - a^2 \cos^2\theta) / [(2mr/r^2 + a^2)^{1/2} (a^2 \cos^2\theta + r^2)^3]$$

$$\Gamma_{tr}^r = m(r^2 - a^2 \cos^2\theta) / (a^2 \cos^2\theta + r^2)^2$$

$$\Gamma_{rt}^r = m(r^2 - a^2 \cos^2\theta) (2mr/r^2 + a^2)^{1/2} / (a^2 \cos^2\theta + r^2)^2$$

$$\Gamma_{rr}^r = -mr^2 + a^2(m \cos^2\theta + r \sin^2\theta) / (a^2 + r^2)(a^2 \cos^2\theta + r^2)$$

$$\Gamma_{\theta t}^\theta = 0$$

$$\Gamma_{\theta r}^\theta = r / (a^2 \cos^2\theta + r^2)$$

¹⁶⁴Nous ne ferons pas ce calcul qui est très laborieux dans la métrique proposée du fait de sa forme hybride.

$$\Gamma^{\Phi}_{\phi t} = a^2 m (r^2 - a^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta (2mr/r^2 + a^2)^{1/2} / (a^2 \cos^2 \theta + r^2)^3]$$

$$\Gamma^{\Phi}_{\phi r} = \{r + [a^2 m (-r^2 + a^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta / (a^2 \cos^2 \theta + r^2)^2]\} / a^2 + r^2$$

Le calcul par mathematica de l'expansion « Exp » défini par $\theta = v_{ff}^{\mu} ;_{\mu}$ donne:

$$Exp = [(2m)^{1/2} (a^2 + 3r^2)] / [2(r(a^2 + r^2)^{1/2} (r^2 + a^2 \cos^2 \theta))]$$

Comme on a calculé $v_{ff\mu} = (1, 0, 0, 0)$, on peut aussi calculer facilement le tenseur $B_{\mu\nu} = v_{ff\mu} ;_{\nu}$ et en déduire le tenseur de rotation $\omega_{\mu\nu} = B_{[\mu\nu]}$ qui se révèle être nul dans ce cas.

Le calcul par mathématique du tenseur d'anisotropie $\sigma_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \theta P_{\mu\nu}$ se présente sous la forme d'une expression complexe qui doit se simplifier (mathematica ne gère pas bien la simplification dans ce cas).

On peut finalement calculer l'équation d'évolution (équation de Raychaudhuri) qui est assez simple, puisque dans ce cas le tenseur de Ricci et le tenseur de rotation sont nuls.

Elle se réduit à:

$$d\theta/d\tau = -\theta^2/3 - \sigma^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}$$

De nouveau mathematica donne le résultat sous une forme compliquée qui doit pouvoir se simplifier.

4- Compléments sur les vecteurs α, β

Rappelons que $\alpha_{\mu} \beta^{\mu} = 0$, les vecteurs sont orthogonaux, mais ce n'est pas tout.

Ces vecteurs sont liés aux vecteurs correspondant aux directions nulles principales caractéristiques bien connus de la métrique de Kerr, comme cela est souligné dans l'article de Doran.

Doran définit:

$$v_i = \left(1, \frac{ay}{a^2 + r^2}, \frac{-ax}{a^2 + r^2}, 0 \right)$$

qui est appelé α_{μ} dans le modèle de la rivière, et

$$a_i = (r^2 + a^2)^{1/2} \left(0, \frac{rx}{a^2 + r^2}, \frac{ry}{a^2 + r^2}, \frac{z}{r} \right)$$

qui au signe près et à un facteur près correspond ¹⁶⁵ à β^{μ} , on a en effet:

$$\beta^{\mu} = -(\beta R / \rho^2) a_i$$

sachant que Doran tient compte de ce facteur dans sa forme de la métrique qui s'écrit:

$$ds^2 = \eta_{ij} dx^i dx^j - \left(\frac{2\alpha}{\rho} a_i v_j + \alpha^2 v_i v_j \right) dx^i dx^j$$

on déduit

$$g_{ij} = \eta_{ij} - v_j (2\alpha a_i / \rho + \alpha^2 v_i) \quad (4.1)$$

avec

La relation avec les vecteurs correspondant $\alpha = \frac{(2Mr)^{1/2}}{\rho}$ les principales de la métrique de Kerr est:

$$\rho^2 = r^2 + \frac{a^2 z^2}{r^2}$$

¹⁶⁵ Remarquons que, dans un cas, il s'agit de composantes contravariantes et dans l'autre de composantes covariantes! On rappelle que $R^2 = r^2 + a^2$, et que $\beta = (2mr)^{1/2} / R$

On peut exprimer v_i et a_i dans la base de vecteurs nuls $n^\pm$, on obtient:

$$v_i = (n^+ + n^-)/2R$$

$$a_i = \frac{1}{2} [n^+ (1 - \beta) - n^- (1 + \beta)]$$

En remplaçant les vecteurs de base a_i et v_i par leurs valeurs en fonction des vecteurs nuls des directions principales, déduites des formules ci dessus, on obtient:

$$g_{ij} = \eta_{ij} - [(n^+ + n^-)_j / 2R] \{ (n^+_i (\alpha/\rho - \alpha^2/2R) - n^-_i (\alpha/\rho + \alpha^2/2R)) \}$$

$$g_{ij} = \eta_{ij} - (4R^2\rho)^{-1} [(n^+_j n^+ (2R\alpha - \alpha^2\rho) - n^-_j n^- (2R\alpha + \alpha^2\rho) + n^-_j n^+ (2R\alpha - \alpha^2\rho) - n^+_j n^- (2R\alpha + \alpha^2\rho)]$$

Doran signale également que les composantes contravariantes de la deuxième partie de l'équation ci dessous sont égales à $(-a_i)$, avec ses notations) en effet:

$$\alpha\rho v^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} = -(r^2 + a^2)^{1/2} \left(0, \frac{rx}{a^2 + r^2}, \frac{ry}{a^2 + r^2}, \frac{z}{r} \right)$$

On voit que même s'il y a de légères différences de présentation, dans cet article vis à vis de ces vecteurs, fondamentalement c'est la même chose puisque c'est bien la métrique de Doran qui est utilisée avec quelques aménagements de forme.

16-Conclusion

Nous avons vu qu'un bon nombre de concepts fondamentaux de la physique émergent du modèle. Ce type de trou noir (modélisé par la métrique de Kerr Newman) est un objet intrinsèquement « très simple », caractérisé seulement par trois paramètres (sa masse, sa charge et son moment angulaire), qui a révélé une phénoménologie d'une richesse insoupçonnée.

Le moment angulaire joue un rôle fondamental¹⁶⁶, car c'est lui qui « déforme » la singularité centrale en un anneau permettant de connecter, par son intérieur, l'espace-temps vers un anti-espace-temps symétrique du premier (où les paramètres comme la charge, la masse, le moment angulaire et donc les lois associées vont être symétriques).

Les trous noirs de Kerr semblent révélateurs d'une « antisymétrie » univers/anti-univers.

Mais, cette antisymétrie n'est pas totale comme le montrent les trous noirs chargés. Nous avons vu que cela résulte de la place différente occupée dans les équations par le moment cinétique a qui intervient un peu partout, dans les coefficients de la métrique, sous forme linéaire et quadratique et couplée ou non à θ et la charge qui intervient seulement sous forme quadratique dans Δ , non couplée à θ , la combinaison des deux donnant des effets différenciés¹⁶⁷.

L'absence d'horizons des événements dans l'anti univers s'explique par la symétrie des interactions (la gravitation y est « répulsive » à grande distance) comme cela est d'ailleurs le cas dans les trous noirs statiques (où l'univers et l'anti-univers ne sont pas connectés).

Une conséquence troublante de l'existence de cet anti univers est que si on considère une étoile (dans notre univers) qui s'effondre en TN de Kerr (ce qui semble plausible physiquement, dans l'état actuel des connaissances), avant l'effondrement, on suppose que l'étoile n'existait que dans notre univers, (physiquement du moins). Après l'effondrement on a un anti univers en plus. Cela pose un problème de conservation des paramètres de l'étoile (énergie, moment cinétique, charge) qui incite à douter de la réalité physique de cet anti-univers du moins lorsque le trou noir de « Kerr » résulte d'une telle formation.

Le calcul montre que ces paramètres évalués par leur flux à travers une surface à l'infini dans l'univers n'ont pas varié, mais alors que dire de la conservation de ces paramètres dans l'anti univers, puisque avant il n'existait pas? Si on l'évalue à l'infini comme pour l'univers, du fait de la symétrie, il est de signe opposé, donc se retrancherait à celui de l'univers.

On peut évacuer le problème en postulant que la région sous l'horizon de Cauchy n'a pas de caractère physique, mais cette démarche est peu productive. On peut aussi supposer que cet anti univers « pré existait » mais n'était pas connecté au nôtre, et que c'est l'effondrement qui les connecte. Plus intéressant, la machine temporelle, attachée à la singularité joue elle un rôle dans le bilan global?

Les trous noirs, en général, avaient déjà permis d'associer naturellement une longueur (le rayon de Schwarzschild) à une masse (via la constante de la gravitation) et des « interactions » asymptotiquement en $1/r^2$, attractives, ou répulsive (dans la 1^{ère} extension analytique maximale). La rotation génère en plus une interaction en $1/(r^2+a^2)^2$, fonction paire symétrique attractive ou répulsive à courte portée, prédominante à proximité de la singularité mais qui ne devient pas infinie à $r = 0$ sur l'axe, du fait du dénominateur où a caractérise la rotation du trou noir. La charge électrique éventuelle génère une autre

¹⁶⁶ La charge joue également un rôle mais différent (voir TN de Reisner Nordström), elles génèrent une structure « filamenteuse » constitués d'espaces temps, connectés, mais sans anti univers comme dans la solution de Kerr qui est encore plus riche.

¹⁶⁷ Une solution chargée statique (Reissner Nordström) n'a pas cette propriété.

interaction asymptotiquement en $e^2 r / (r^2 + a^2)^2$, fonction impaire antisymétrique qui ne diverge pas à $r = 0$ pour la même raison que précédemment. Tout ceci fait que ces trous noirs, qui semblent avoir une consistance physique, fournissent un modèle géométrique naturel pour justifier bon nombre de concepts et paramètres fondamentaux en physique.

A l'autre bout de l'échelle, nous avons rencontré « l'électron » de Kerr Newman. En relativité générale (classique) un trou noir peut avoir n'importe quelle masse, charge et spin (si on ne se préoccupe pas de leur mode physique de formation).

On peut modéliser un électron (nu) par un trou noir de Kerr Newman (dans une version plus simple de la métrique, sans horizons, du fait de la valeur des paramètres associés qui sont ceux de l'électron) et montrer que cet « électron » dans un espace temps, est vu comme son antiparticule (positron) dans l'anti-espace temps associé. Comme, on sait que dans cet anti univers les quantités physiques (masse, charge spin) sont inversées et qu'en Relativité Générale une masse négative génère un champ de nature répulsive¹⁶⁸, cela fournit un modèle à l'hypothèse que l'antimatière pourrait générer un champ gravitationnel répulsif.

Comme le facteur gyromagnétique d'un trou noir de Kerr Newman vaut 2, de façon générique et non triviale, cela complète la cohérence de description d'un électron nu.

Le quatrième invariant de Carter, dont la découverte avait paru miraculeuse, révèle que cet espace temps en « mouvement stationnaire » génère un effet surprenant de couplage entre l'énergie et le moment cinétique, ce qui transparaît dans l'équation géodésique entre autres et incite les considérer toujours combinés et non pas séparément. L'interprétation physique de cet invariant, par comparaison à la limite Newtonienne, remarquablement décrit dans [19] révèle des propriétés inattendues de cet espace temps, plaidant en faveur de l'utilisation d'autres coordonnées à caractère plus physique (inertielles).

Mais le point le plus frappant, (et le plus énervant) est sans conteste, la présence de boucles temporelles.

Elle se manifeste dans une région de l'espace temps, où des boucles temporelles sont possibles et est liée au fait que, dans cette région très singulière (La Carter Time Machine) de topologie torique, bordée en son intérieur par la singularité, le « temps possède deux dimensions¹⁶⁹ », dont une périodique.

En effet, les vecteurs ∂_t et ∂_ϕ , associés aux coordonnées de Boyer Lindquist, sont tous les deux simultanément de type temps¹⁷⁰. Nous avons discuté de cette phénoménologie et fait une proposition qui permet de conserver la causalité.

Cela conduit à une situation paradoxale, puisque la signature de la forme canonique de la métrique est $(+, -, -, -)$ ¹⁷¹ « par construction » en Relativité Générale, par compatibilité (locale) avec la Relativité Restreinte, (ce qui est attesté par la valeur du déterminant de la métrique qui est toujours négatif) et que cette propriété doit être préservée dans toute la variété. Nous savons que dans le cadre de la Relativité, ce « paradoxe » est apparent, puisque que la forme canonique est définie localement (cela veut dire que dans l'espace tangent, en un point quelconque, on pourra toujours trouver un système de coordonnées local

¹⁶⁸ Voir Bondi [3]

¹⁶⁹ Terme un peu lapidaire pour souligner l'étrangeté du phénomène. Il est plus correct de dire que deux dimensions (coordonnées) sont simultanément de type temps ce qui a été explicité dans le texte. Les vecteurs de base ∂_t et ∂_ϕ sont quasiment co-linéaires comme nous l'avons montré.

¹⁷⁰ Remarquons, au passage, que la dimension de type temps n'était pas toujours t , ce pouvait être r (mais le produit scalaire $\partial_t \cdot \partial_r$ était toujours de type temps), par exemple sous l'horizon dans les trous noirs de Schwarzschild, sans que cela nuise à la causalité

¹⁷¹ Ou l'opposé $(-, +, +, +)$ puisque ce ceci est conventionnel.

¹⁷²où cette métrique a une dimension de temps et trois d'espace) et que les vecteurs ∂_t et ∂_ϕ non orthogonaux dont « l'angle » varie sont, eux, relatifs à un système de coordonnées « global », dans un espace courbe, qui couvre toute la variété. Les cônes de lumière définis localement, dans l'espace tangent, suivent la courbure de l'espace temps et ils peuvent s'incliner et se déformer de façon à générer cette situation globalement.

Dans une analyse phénoménologique destinée à interpréter cela, nous avons vu que pour faire décrire à des observateurs physiques (dans le contexte des coordonnées où ces boucles sont possibles), ne serait ce que des « boucles temporelles à t constant », il faut dépenser une telle quantité d'énergie pour orbiter en résistant à l'attraction de la singularité proche, que cela semble rendre la chose antinomique avec les hypothèses classiques de la solution de Kerr Newman qui fait qu'on néglige le champ généré par la « masse d'épreuve ».

Par ailleurs cette débauche d'énergie pour « gagner » du temps nous rappelle que l'énergie est la grandeur physique associée au temps.

Convergences et perspectives

Dans cette revue des points qui nous paraissaient les plus caractéristiques, j'ai bien conscience qu'il y un petit côté « inventaire à la Prévert ».

C'est lié à l'approche phénoménologique qui s'attache aux effets, qui peuvent être divers. Mais le but de la démarche est évidemment de trouver l'unité sous jacente.

Tous ces points tournent¹⁷³ en fait autour de la « rotation » qui est à la source de tous ces étranges phénomènes. Ce document est loin d'en démêler tous les entrelacs, mais nous avons essayé en explorant quelques pistes d'en faire une synthèse permettant d'en brosser un tableau.

Beaucoup de questions restent en suspend et nous en avons peut être plus soulevées que nous n'avons apporté de réponses. C'est souvent le lot de ce type d'investigation.

J'ai essayé de dégager les principes qui me paraissaient sous jacents à cette étude. J'ai été particulièrement intéressé¹⁷⁴ par les méthodes, utilisées pour appréhender ces problèmes. J'ai toujours été convaincu que l'analyse de la méthode utilisée pour appréhender un problème se révélait être essentiel à la compréhension du problème lui-même.

Quelles perspectives ? La Relativité Générale est une théorie déjà ancienne (1915), qui ne suscite plus guère de travaux. Malgré sa grande valeur¹⁷⁵, on en connaît ses limites (qu'elle ne cache pas d'ailleurs)¹⁷⁶ et les travaux actuels s'orientent vers des théories qui tentent de la généraliser ou de l'inclure comme première approximation dans une théorie plus vaste¹⁷⁷. Pourtant à travers cette étude, j'ai pu mesurer combien de points fondamentaux étaient encore mal compris, et pas seulement de moi. Une meilleure compréhension de ces points ne peut qu'être bénéfique à l'ensemble de la physique.

17-Remerciements :

Je tiens à remercier chaleureusement G. Chardin et son équipe, pour leur accueil et leur aide

¹⁷² En utilisant les vecteurs canoniques V, W à la place des vecteurs ∂_t et ∂_ϕ par exemple.

¹⁷³ C'est le cas de le dire...

¹⁷⁴ Et j'ai beaucoup appris.

¹⁷⁵ Comment une théorie aussi simple (voire rustique) peut elle faire des prédictions aussi bien vérifiées ?

¹⁷⁶ Voir par exemple « le théorème de singularité »

¹⁷⁷ Gravitation quantique, théorie des supercordes, géométries non commutatives....

18-Annexes :

Annexe 1 :Structure Globale des champs gravitationnels de la famille Kerr –Newman (B.Carter)

Annexe 2 :Les conditions principales d'énergie en Relativité générale

Annexe 3 :Coordonnées avancées et retardées en espace temps de Kerr Newman

Annexe 4 : La déviation géodésique

Annexe 5 : Champ gravitationnel généré par une masse en rotation comme exemple de métrique spéciale algébrique (Traduction article de Kerr).

Annexe 6 : Negative mass in general relativity (traduction de l'article de H. Bondi)

Annexe 7:Définition de la masse, du spin et de la charge en relativité générale

Annexe 8 : Solution particulière à N corps en Relativité générale : Trous noirs extrémaux de Reissner-Nordström

Annexe 9 : Orbites et trajectoires

Annexe 10 :Orbite circulaire stable la plus proche du trou noir (cas TN Kerr extrémal)

Annexe 11 :Paradoxe de Klein pour des particules de Spin-0

Annexe 12: Classification de Petrov

Annexe 13 : Energie Négative en QFT

Annexe 14 :Introduction au cas de trajectoires temporelles permettant de « remonter » le temps.

Annexe 15 : Solutions de l'équations d'Einstein et causalité

Annexe 16 : Forces de marées subies par un voyageur

Annexe 17 : Formalisme tétradique :Espace temps de Kerr-Newman dans ce formalisme

Annexe 18 : Théorèmes de Jeans

Annexe 19 : Généralités sur les horizons des trous noirs

Annexe 20 : Moment angulaire et constante de Carter dans la métrique de Kerr, (La nature physique du quatrième invariant de B. Carter)

Annexe 21 : Univers à symétrie maximum

Annexe 22 : On quadratic first integrals of the geodesic equations for type D Spacetimes (Walker-Penrose)

19-Références

- 3- A parameter free explanation of the Cosmological Constant. G. Chardin, Hyperfine interactions 109 (1997) 83
- 4- G. Chardin: DSM/ Dapnia, CEA Saclay F91191 Gif sur Yvette cedex France Gravitation, C,P,T symmetries and the second law AIP Conf. Proc. 643 (2002) 385

Définition masses négatives en RG

- 5- H. Bondi: **Negative Mass** in General Relativity, Review of Modern Physics, vol 29, number 3, July 1957

Conditions contraignant l'énergie négative

- 6- Some thoughts on **energy conditions** and wormholes, T. Roman, arXiv.org:gr-qc/0409090 (2005-09-20)
- 7- Spatially averaged **Quantum Inequalities** does not exist in Four dimensional Space Time (L.H Ford, A. Helfer, T. Roman) PhysRevD.66.124012.

Articles sur la métrique de Kerr Newman

- A- Kerr R. (1963) Gravitational Field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. Physical review letters 1 September 1963
- 8- Modern Relativity (D.Waite) <http://www.geocities.com/zcphysicsms/>
- 9- Global Structure of the Kerr family of gravitational Field (B. Carter -68) Phys. Rev. Vol 174, number 5, oct 1968..
- 10- Complete Analytic extension of the symmetry axis of Kerr's Solution of Einstein's equations (B.Carter -66) Phys. Rev. 141, 1242 (1966)
- 11- A Maximal Extension and energy extraction of Kerr Black Holes (J. Reyes-04) <http://leverett.harvard.edu/showcase/1311.pdf>
- 12- Gyromagnetic Ratio of a massive Body (J.M.Cohen, J. Tiommo, R.M.Wald-) Phys. Rev. D Vol 7, Number 4, feb73
- 13- Rotating masses and their effect on inertial Frames (D.Brill, J.M Cohen-Phys. Rev. Vol 143, Number 4 March 66)
- 14- Electromagnetic fields and Rotating Masses (J.M Cohen -Phys. Rev. Vol 148, Number 4 August66)
- 15- Gyromagnetic ratio of Einstein Maxwell fields (C.Reina, A.Treves), Phys.Rev D Vol 11, Number 10, May 1975
- 16- Slowly rotating bodies with arbitrary charge in general relativity (C.Briggs, J.M. Cohen- G. L DeWoolson, L. S Kegeles 81) Phys.RevD, Vol 23, Number 6 March 1981
- 17- An electromagnetic Thirring Problem (J.Ehlers, W.Rindler -71)Phys.Rev D Vol.4 Number 12, December 1971
- 18- Electromagnetic Fields and massive Bodies R. Wald, Phys.Rev.D, Vol 6, Number 6, Sept72
- 19- -Gravitational Field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics, Roy Kerr, Phys. Rev. Letters, Vol 11, Number 5, sept 1963
- 20- Complete Analytic Extension of the symmetry Axis of Kerr's Solution of Einstein Equations (B.Carter Phys. Review V141, Number 4, Jan 66)
- 21- Angular momentum and separation constant in Kerr metric (J.Phys.A:Math.Gen 13 (1980), 1701-1708, Fernando de Felice)
- 22- About duality and Killing tensors (D. Baleanu) arXiv:gr-qc/9805052v2 16 August 1999)
- 23- 21 The separation of the Hamilton-Jacobi equation for the Kerr metric (G.E Prince, J.E Albridge, S.E Gofrey, G.B Byrnes, 1999 J.Austral. Math.soc.ser B4)
- 24- Type-D space-times with a Killing Tensor (M.Demianski, M. Francaviglia, J.Phys.A.Math.Gen.14, 1981)
- 25- Solutions of Penrose's equation (E.N Glass,J.Kress Journal of mathematical physics Vol 40 number 1 Jan 1999)
- 26- Quantum and Classical relativistic energy states in stationary geometries (N.Deruelle, R.Ruffini74) .Phys.Letters)
- 27- Reversible transformations of e charged Black Hole (D. Christodoulou, R. Ruffini- 71. phys. Rev)

Paradoxe de Klein

- 28- Klein Paradox for spin-0 particles: <http://www.phys.ualberta.ca/phys512/latex2html/node35.html>
- 29- Klein paradox in a Kerr geometry(N.Deruelle, R.Ruffini, Phys.letters Vol 57B, Number 3, July 1975)
- 30- Quantum electrodynamic effect in Kerr Newmann geometries (T.Damour, R.Ruffini-76) Phys.Rev.letters Vol 35, Number 7

- 31- Black hole evaporation in the Klein-Sauter-Heisenberg-Euler formalism (T.Damour, R.Ruffini. Phys.Rev. D Vol 14, Number2 July 76)

Instabilité des solutions avec singularité nue dans vide quantique (polarisation du vide)

- 32- Dressing up a Reissner naked singularity (T.Damour, N.Deruelle) Physic Letters, Vol 72B, number 4, Jan 78
- 33- Numerical approaches to space time singularities:BKL conditions, Naked singularity and the hoop conjecture,Nature of the singularity in charged rotation black hole (B.Berger) Livingreviews-Max-Planck-Gesellschaft). http://www.livingreviews.org/Articles/lrr-2002-1/article_prep.html

Univers "symétriques" matière/antimatière

- 34- **Matter, antimatter and geometry (J.P Petit, G. D'Agostini, JH. Couannier)**
- 35- Negative energy and time reversal in quantum field theory (F.H Couannier) ccsd-00001476,version 6-31 Mar 2005
- 36- "Symmetric cosmologies" Reference de Rujula, Glashow, Cohen : <http://ist-socrates.berkeley.edu/~morey/baryontalk/symmfailure.html>
- 37- Discrete symmetries and general relativity the dark side of gravity (FH Couannier arXiv:gr-pc/01410055 v3 31 Mars 2005)

Antimatière et gravitation

- 38- Does antimatter fall up or down (FAQ J. baez)

Métrie de Kerr et machines temporelles

- 39- On Time Machines in Kerr-Newman Space time (Christian Wüthrich- 1999)
http://www.itp.unibe.ch/diploma_thesis/wuthrich/wuthrichLiz.pdf
- 40- Kerr space Time (B. O'Neil). AK Peters
- 41- Black holes: The Inside Story (W. Israël, S.Droz,S. Morsink)
- 42- The Mathematical Theory of Black Holes (S. Chandrasekar) Oxford.U 1983
- 43- Cours de Relativité Générale (Luc Blanchet)
<http://elbereth.obspm.fr/DEA/enseignements/poly/relativite.ps.gz>
- 44- Cours de Gravitation (J.Perez) IAP. http://www.ensta.fr/~perez/papiers/toc_mat40_petit_format_port.pdf
- 45- Cours de Relativité générale (E.ourgoulhon),IAP <http://luth2.obspm.fr/~luthier/gourgoulhon/>
- 46- **Space time and geometry (S. M Carroll) Addison Wesley 2003:**
- 47- Cours de relativité générale, B. Linet. <http://www.phys.univ-tours.fr/~linet/>
- 48- **Thorne, Misner, Wheeler (Gravitation).** Freeman 1973
- 49- Landau Lifchitz (Théorie de Champs éd. 5) éd. Mir
- 50- A heuristic way of obteneing the Kerr Metric (Jörg Enderlein) Am J. Phys.65(9) 1997
- 51- Second Order Scalar invariant of the Riemann tensor : Application to Black Hole spacetimes : C. Cherubini, D.Bini, S.Capoziello, R. Ruffini (International journal of modern physics, 2003
- 52- http://nrumiano.free.fr/Fetoiles/int_noir2.html
- 53- <http://www-cosmosaf.iap.fr/MIT-RG-27.htm#Kerr>
- 54- http://www-cosmosaf.iap.fr/D_Waite_11.htm#BM127
- 55- On quadratic First integrals of the geodesic equation for type{22} Spacetimes. M. Walker,R. Penrose , Commun.math.Phys. 18,265-274 (1970)
- 56- Les figures où cette référence est citée ont été tracées par Maxima 5.9.3 <http://maxima.sourceforge.net/ile/COPYING>.
- 57- Petrov Pirani classification : http://en.wikipedia.org/wiki/Petrov_classification
- 58- The River model of black holes Hamilton,Andrew.J.S & Lisle Jason P. arXiv :gr-qc/0411060v2 31 Aug 2006
- 59- The maximum tension principle in general Relativity. Gibbons G.W, Cambridge University, arXiv :hep-th/0210109v1 11oct 2002
- 60- New Form of the Kerr Solution, C. Doran, Physical Review D,Vol 61,067503 published 25/02/2000
- 61- Carter B. (2006) Half century of Black hole theory: From physicists « purgatory » to mathematicians « paradise »arXivgr-qc/0604064 v1 15 Apr 2006