# Cours de cosmologie: Deuxième année

## 1- Espace temps et géométrie
## Variétés, Tenseurs

*Le modèle standard de la cosmologie est un modèle qui s'appuie sur la relativité générale et comme la relativité générale est une théorie géométrique (non euclidienne) de la gravitation, pour comprendre celle ci il est utile d'introduire quelques concepts sur la géométrie et les outils utilisés. La variété va décrire géométriquement l'espace temps et les tenseurs vont être utilisés dans les équations décrivant les lois physiques pour rendre leur forme indépendante du référentiel dans lequel elles sont décrites (covariance)*

Jacques Fric , SAF, Avril 2010

# Notion de Variété

En mathématiques, le terme **variété** a trois déclinaisons :

· En géométrie et topologie différentielles, une variété (manifold en anglais) est un objet géométrique obtenu par recollement d'ouverts d'espaces vectoriels.

· En géométrie analytique, une variété algébrique est le lieu d'annulation d'un, ou d'une famille de polynômes.

· En algèbre, une variété est une classe particulière de structures algébriques.

Ces définitions ont des relations entre elles, mais nous nous intéressons plus particulièrement à la première définition.

Le formalisme utilisé est pour l'essentiel « ensembliste ».

# Notion de Variété

Après sa publication de la théorie de la RR , Einstein s'est essayé, sans succès à mettre au point une théorie de la gravitation invariante sous une transformation de Lorentz.

La vraie rupture a consisté à remplacer l'espace de Minkowski par un espace courbe, dont la courbure est générée par l'énergie et la matière et réagit avec elle.

Pour explorer cette voie plus avant, nous devons acquérir les connaissances mathématiques relatives à ces espaces courbes.

Nous allons d'abord nous intéresser aux Variétés en général, en définir les fondements formels essentiels ce qui nous permettra de fonder les propriétés mathématiques des espaces courbes.

Notons que ces concepts relevant de la théorie des ensembles, aspect souvent éludé, son exposé rigoureux est assez lourd. Nous avons donc fait un choix compromis entre rigueur et compacité.

Pour la généralité nous nous réfèrerons à des espaces à "$N$" dimensions encore que pour notre application $N = 4$.

# Définition intuitive de la notion de variété

Une Variété (ou quelquefois Variété différentiable) est un des concepts les plus fondamentaux en mathématiques et en physique.

Nous connaissons les propriétés de l'espace Euclidien à *n* dimensions, $R^n$, qui est l'ensemble des *n*-tuples $(x^1,\ldots, x^n)$.

La notion de Variété reflète l'idée que l'espace peut être courbe et avoir une Topologie compliquée, mais qu'il peut être assimilé localement à $R^n$.

Assimilé ne signifie pas que la métrique est la même, mais que les notions de base de l'analyse comme ensembles ouverts, fonctions et coordonnées sont les mêmes.

La Variété complète est alors reconstituée en raccordant sans discontinuité toutes ces régions locales.

Ainsi on peut la définir comme représentant un espace fibré où la base est l'espace temps courbe et la fibre l'espace tangent minkowskien (associé au groupe de Poincaré). La connexion décrite par 64 scalaires (32 indépendants au maximum) indique comment les fibres sont assemblées.

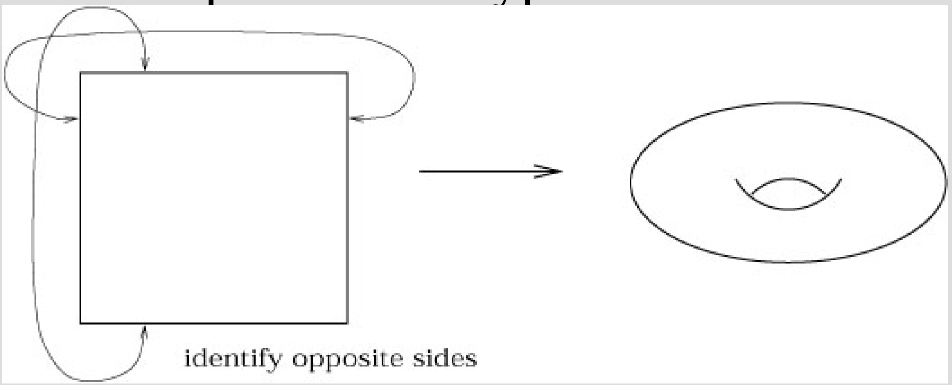
# Exemples de Variétés

$R^n$ lui même incluant la ligne $\mathcal{R}$ , le plan $R^2$, etc..… Il est évident que $R^n$ ressemble localement à lui même en tout point et pour cause!

L'hypersphère de dimension $n$, $S^n$, définie comme le lieu des points à distance constante d'un point (centre ) dans un espace à $R^{n+1}$ dimensions. Le cercle et $S^2$ la surface de la sphère sont parmi les exemples favoris de Variétés.

L'Hyper-Tore $T^n$ de dimension $n$ qui est obtenu à partir d'un hypercube de dimension $n$ en joignant les faces opposées.

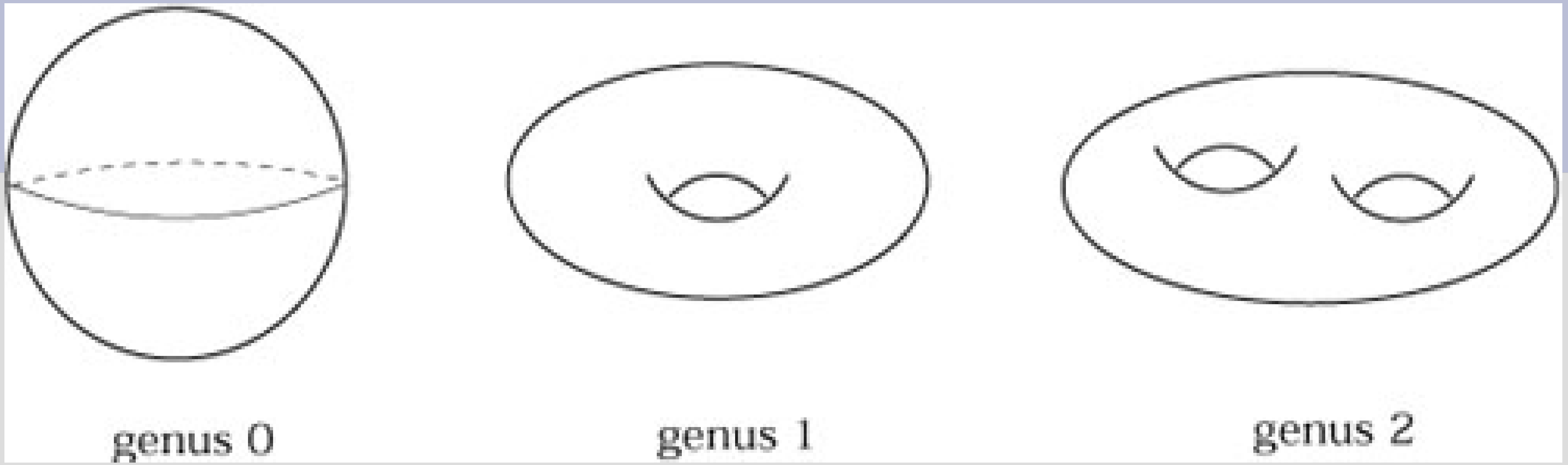
Le tore traditionnel (chambre à air) est obtenu à partir d'un carré en collant les côtés opposés.




Une surface de Riemann de genre $g$ est un Tore-$2D$ avec $g$ trous au lieu d'un. $\boldsymbol{S^2}$ est une surface de Riemann de genre zéro.

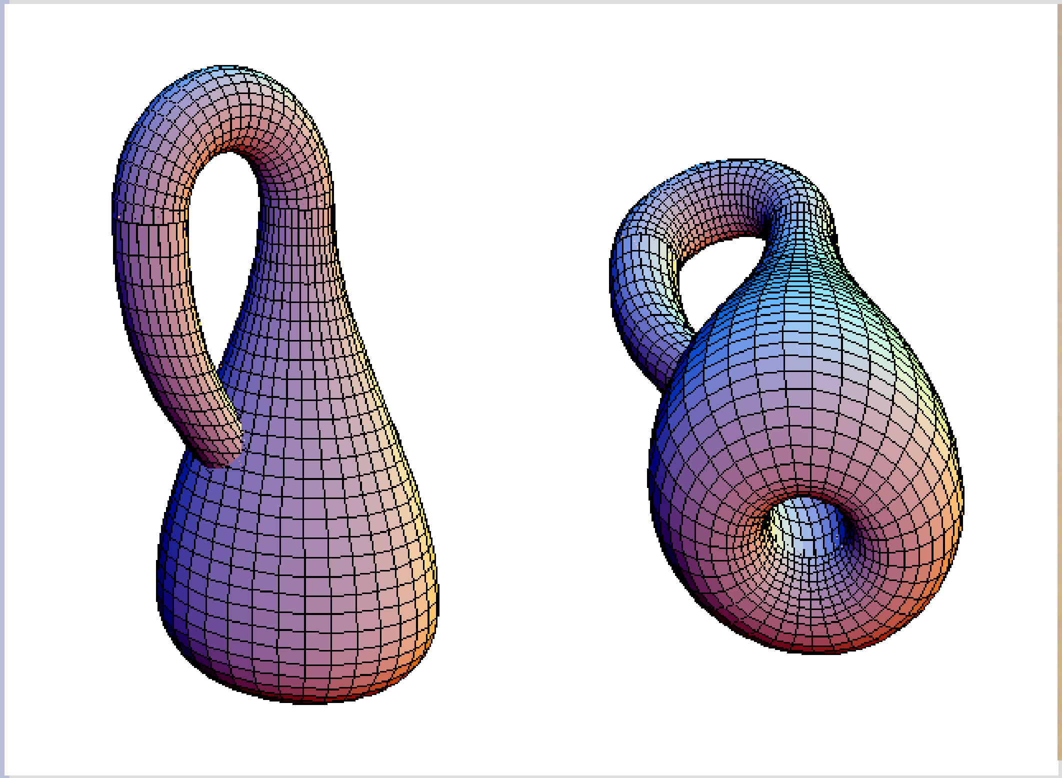
Toute Variété compacte, orientable (qui possède des "(hyper)faces" disjointes) et sans bords de dimension deux est une surface de Riemann d'un genre dépendant de sa topologie (nombre maximum de coupures indépendantes qu'on peut opérer tout en respectant la connexité : un seul morceau).

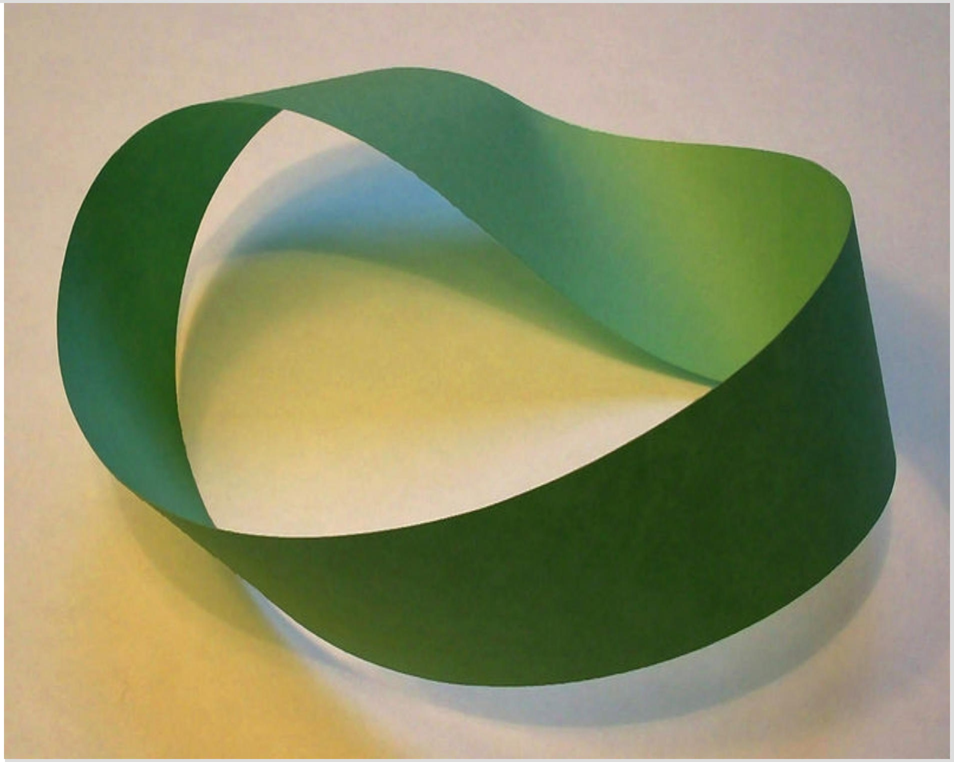
# Exemples de Variétés




- De façon plus abstraite, un ensemble comme les rotations dans $R^n$ forment une variété. Les groupes de Lie sont des variétés munies en plus d'une structure de groupe. Le produit de deux variétés est une variété. Etant donné 2 variétés M et M' de dimension n et n' nous pouvons construire une variété M x M' de dimension n + n' constituée des paires ordonnées (p, p') pour p appartenant à M et p' appartenant à M '.

# Exemples de Variétés exotiques non orientables





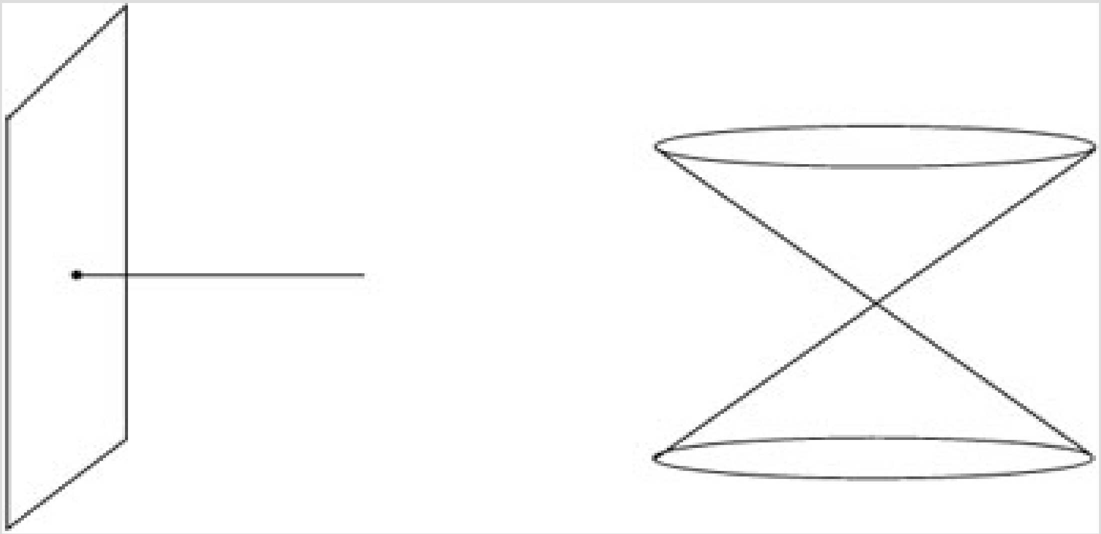
# Qu'est ce qui n'est pas une variété?

Défini ainsi, la notion de Variété semble ratisser large.

Y a t'il des choses qui ne soient pas des Variétés ?

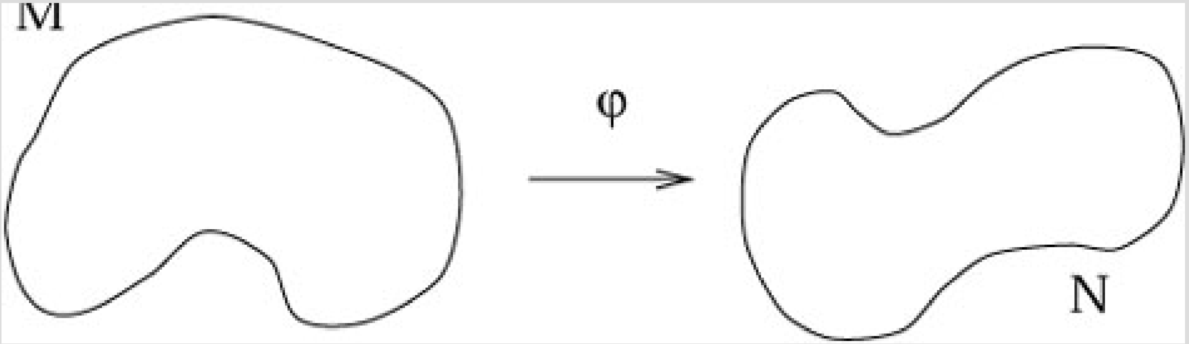
Tout plein! Tout ce qui ne ressemble pas localement à $R^n$, par exemple la ligne unidimensionnelle coupant un plan et deux cônes réunis par leur sommets ( Un seul cône est une variété si on exclut le sommet).

En effet, dans tous ces cas il y a un point qui ne ressemble pas localement à un espace euclidien de dimension donnée.



# Applications sur les variétés

La notion la plus élémentaire est celle d'application entre deux ensembles (de l'un vers l'autre appelé aussi une carte par analogie au fait qu'une carte est une application de ce type entre un objet "le territoire" et sa "représentation " sur une feuille de papier). **La connaissance de la notion d'ensemble est supposée.** Soit deux variétés $M$ et $N$, une application $\Phi : M \rightarrow N$ est une relation qui fait correspondre à chaque élément de $M$, exactement un élément de $N$. Une application est une généralisation du concept de fonction. La figure canonique d'une application ressemble à ce qui suit :

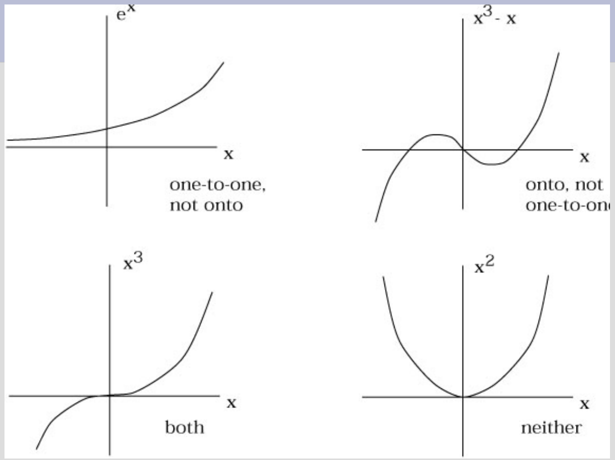



**Composition d'applications:**

Etant donné deux applications $\Phi : A \rightarrow B$ et $\Psi : B \rightarrow C$, nous définissons la composition $\Psi \circ \Phi : A \rightarrow C$ par l'opération $(\Psi \circ \Phi)(a) = \Psi \circ (\Phi(a))$. Si $a$ appartient à $A$, $\Phi(a)$ appartient à $B$, alors $(\Psi \circ \Phi)(a)$ appartient à $C$. L'ordre des applications s'explique par le fait que la plus à droite agit en premier.

# Applications injectives subjectives, bijectives,

Une application $\Phi$ est appelée injective si chaque élément de $N$ est au plus l'application d'un seul élément de $M$ , et surjective si chaque élément de $N$ est au moins l'application d'un élément de $M$. Soit les fonctions suivantes $\Phi$ de $R \rightarrow R$ .




$\Phi(x) = e^x$ est injective mais pas surjective,

$\Phi(x) = x^3 - x$ est surjective , mais pas injective,

$\Phi(x) = x^3$ est les deux alors que

$\Phi(x) = x^2$ n'est ni injective, ni surjective.

<u>**Domaine d'une application:**</u> L'ensemble $M$ est appelé le **domaine** de l'application $\Phi$ et l'ensemble des points de $N$ résultant de l' application sur $M$ est appelé l' **image** de Φ.

<u>**Image , pré image d'une application**</u>: Pour un sous ensemble $U$ de $N$, l'ensemble des éléments de $M$ cartographiés par $U$ est appelé la **pré-image** de $U$ par $\Phi$, ou $\Phi^{-1}(U)$.

<u>**Applications bijectives:**</u> Une application à la fois injective et surjective est appelée **bijective ou biunivoque**. Dans ce cas nous pouvons définir l'application inverse $\Phi^{-1}$: $N \rightarrow M$ *par* $(\Phi^{-1} {}_o \Phi)(a) = a$. Notons que le même symbole $\Phi^{-1}$ est utilisé pour la pré-image et l'application inverse, même si la première est toujours définie alors que la seconde n'est définie que dans certains cas.

# Continuité d'une application

La notion de continuité d'une application entre espaces topologiques ( donc de variétés) est en fait assez subtile. Nous n'en donnerons pas la formulation rigoureuse.

Cependant les notions intuitives de continuité et par là de différentiation d'applications *f* de $R^m \rightarrow R^n$ entre espaces Euclidiens est très utile. Une carte de $R^m \rightarrow R^n$ prend un *m*-tuple $(x^1, x^2, .., x^m)$ et lui fait correspondre un *n*-tuple $(y^1, y^2, ., y^n)$, et peut à ce titre être considéré comme une liste de *n* fonctions $f^i$ de *m* variables:

Nous allons appeler ces fonctions $C^p$ si elles sont continues et p-fois différentiables et appeler $C^p$ la carte entière issue de l'application $f : R^m \rightarrow R^n$, si chacune des fonctions qui la composent est au moins de type $C^p$. Ainsi une carte $C^0$ est continue mais pas nécessairement différentiable alors qu'une carte $C^\infty$ est continue et différentiable à l'infini. Les cartes $C^\infty$ sont quelquefois appelées **lisses**.

# Difféomorphisme

Nous dirons de deux ensembles qu'ils sont **difféomorphes** s'il existe une carte $f: M \to N$ de type $C^\infty$ possédant une carte inverse $f^{-1}: N \to M$ de type $C^\infty$ également. L'application $f$ est alors appelée un difféomorphisme. La notion de difféomorphisme entre deux espaces ne s'applique qu'aux Variétés, où la notion de différentiation résulte de leur ressemblance avec l'espace Euclidien $R^n$ du moins localement.

L'invariance par difféomorphisme correspond à l'implémentation technique d'une idée physique due à Einstein. Cette idée introduit une modification profonde des notions pré-relativistes de temps et d'espace. En physique non relativiste, on stipule que les objets physiques peuvent être localisés dans l'espace et le temps, celui-ci étant défini comme une trame de fond par une structure non dynamique. Opérationnellement, cette trame d'espace temps peut être définie par des systèmes d'objets physiques de référence, objets considérés physiquement dynamiquement découplés du système physique étudié. Ce concept n'est plus valide, lorsqu'on s'intéresse à la gravitation dans le cadre relativiste. En physique de la relativité générale, les objets physiques ne sont localisés dans l'espace et le temps que les uns par rapport aux autres. En conséquence, si nous déplaçons tous les objets dynamiques, ensembles, dans l'espace temps, nous ne générons pas un nouvel état différent, mais une description mathématique équivalente du même état physique. C'est cela, l'invariance par difféomorphisme.

**Règle de chaînage:** L'enchaînement d'applications $f : R^m \to R^n$ et $g : R^n \to R^l$ amène à définir la loi de composition $(g_\circ f): R^m \to R^l$

# Ensemble ouvert

Nous devons d'abord définir un ensemble ouvert, que nous allons munir d'un système de coordonnées et après nous allons devoir raccorder ces ensembles ouverts d'une certaine façon. Commençons par une n-sphère ouverte qui est l'ensemble des points $x$ de $R^n$ tels que $| x - y| < r$ pour une valeur fixe de $y$ de $R^n$ et $r$ de $\mathbb{R}$ , où $| x - y| = [S (x_i - y_i)^2]^{1/2}$. L'inégalité est stricte, la n-sphère ouverte est l'intérieur de la $n$-sphère de rayon $r$ centrée à $y$.

Un ensemble ouvert de $R^n$ est un ensemble constitué de l'union d'un nombre arbitraire ( jusqu'à l'infini) de n-sphères ouvertes. En d'autres termes, $V$ de $R^n$ est ouvert si quel que soit $y$ de $V$, il y a une n-sphère ouverte centrée à $y$ qui est complètement incluse dans $V$.

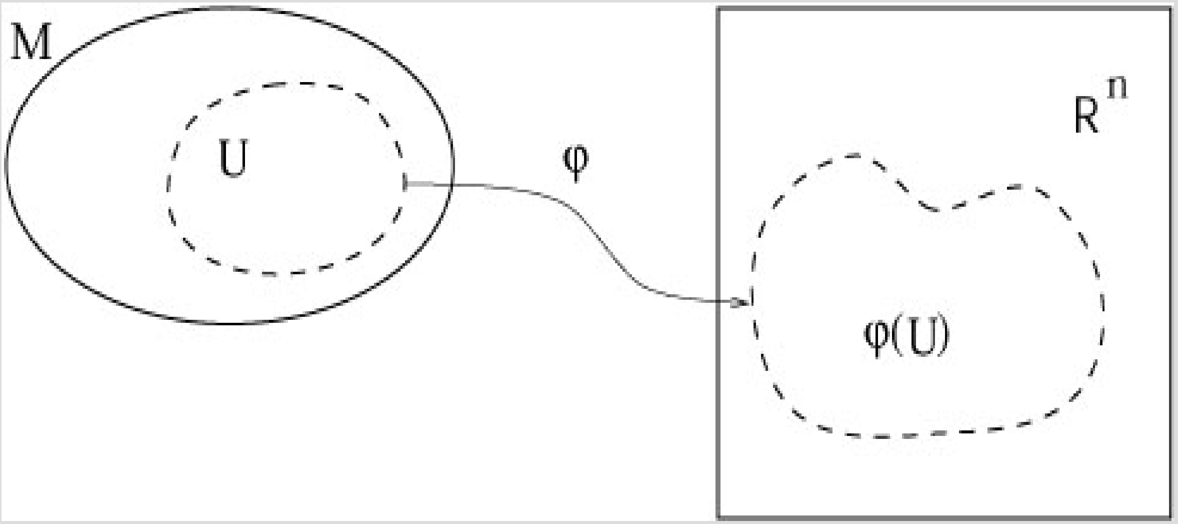
En gros, un ensemble ouvert est l'intérieur d'une surface fermée de dimension ($n$ - 1) où l'union de plusieurs intérieurs de ce type. En définissant la notion d'ensemble ouvert nous avons muni $R^n$ d'une topologie , dans ce cas d'une topologie à métrique standard.

# Système de coordonnées

Un **système de coordonnées** consiste en un sous ensemble $U$ d'un ensemble M, associé à une carte injective $\Phi : U \rightarrow R^n$, telle que l'image de $\Phi(U)$ est ouverte dans $\mathscr{R}$ .

Chaque carte est surjective vis à vis de son image, ainsi la carte $\Phi : U \rightarrow \Phi(U)$ est inversible .

Nous pouvons alors dire que $U$ est un ensemble ouvert dans $M$. (Nous avons alors muni $M$ d'une topologie , bien que nous ne développerons pas ce point )



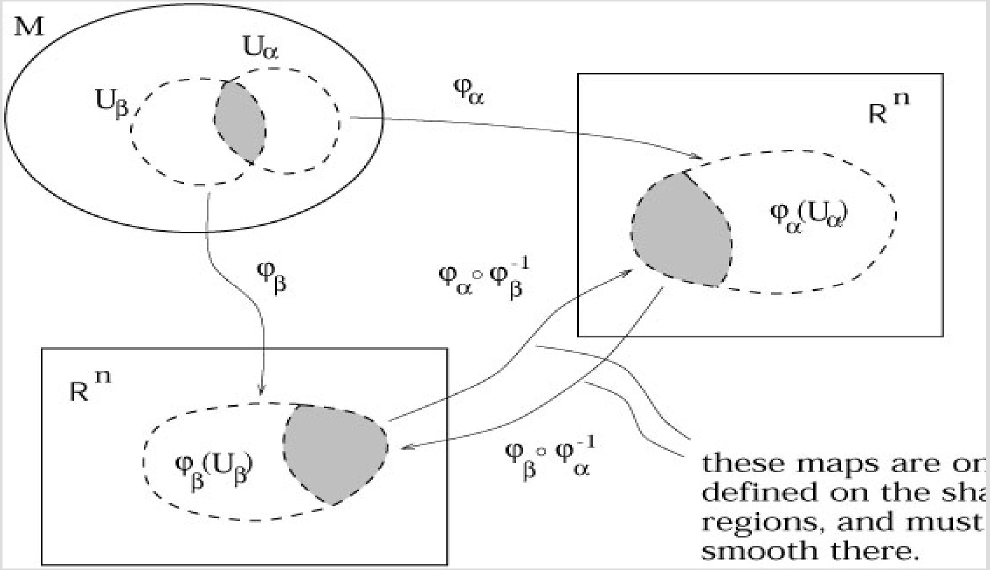
# Atlas

Un **atlas** de type $\boldsymbol{C}^{\infty}$ est une liste indexées de systèmes de coordonnées**:** $\{(U, f_a)\}$ qui remplit deux conditions:

1- L' union de $U_\alpha$ est égale à $M$ : la couverture des $U_\alpha$ est $M$.

2- Les systèmes de coordonnées sont assemblés sans raccords.

Plus précisément si deux systèmes de coordonnées se recouvrent les recouvrements doivent être gérés comme nous le montrerons sur un exemple et toutes ces cartes doivent être partout où elles sont définies de type $\boldsymbol{C}^{\infty}$ . Ceci est plus clair sur la figure suivante :



# Définition d'une Variété

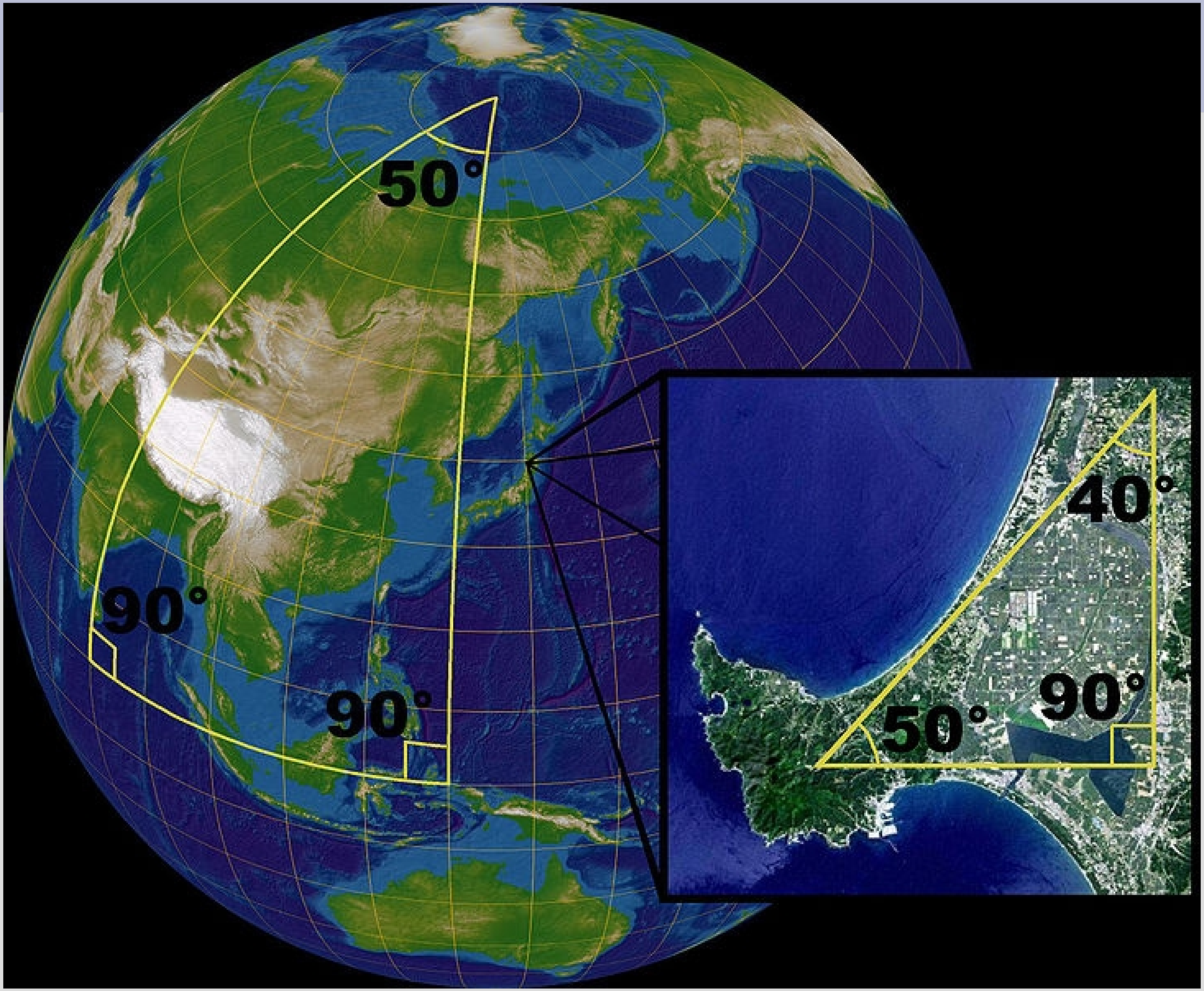
Enfin, une **Variété** de dimension *n* de type $C^\infty$( Variété *n* en abrégé) est simplement un ensemble $M$ muni d'un atlas maximum, qui contient tous les systèmes de coordonnées compatibles possibles. Nous pouvons remplacer $C^\infty$ par $C^p$ dans nos définitions précédentes.

Pour notre propos, le niveau de différentiation d'une Variété n'est pas critique, nous supposerons qu'il est aussi différentiable que nécessaire à notre application. La contrainte d'atlas maximum permet d'éviter que deux espaces équivalents qui seraient munis d'atlas différents ne soient comptés comme deux variétés différentes. Cette définition formalise la notion d'ensemble assimilable localement à $R^n$. Nous aurons rarement à faire appel à l'intégralité de la définition, mais rigueur oblige.

Un point intéressant dans notre définition est qu'elle ne fait pas appel à l'imbrication de la Variété dans des espaces Euclidiens de dimension supérieures. En fait toute Variété de dimension *n* peut être imbriquée dans $R^{2n}$ (Théorème d'imbrication de Whitney) et nous utiliserons quelquefois cette propriété ( comme pour la définition de la sphère précédemment).

Mais il est important de noter que la Variété existe indépendamment de toute imbrication. Nous n'avons aucune raison de penser que l'espace-temps à quatre dimensions est imbriqué dans un espace plus grand.

# Carte: Exemple de la Variété Surface de la Terre



# Atlas, Cartes, exemple de la Terre

On se déplace sur la sphère terrestre en utilisant des cartes géographiques planes, rassemblées en un atlas. Au bord d'une carte figure l'information nécessaire pour y « recoller mentalement » la carte suivante. Pour opérer ce recollement, une certaine redondance dans l'information est nécessaire : ainsi la carte de l'Europe et celle de l'Asie peuvent toutes deux contenir Moscou.

De manière similaire, il est possible de décrire une variété en utilisant une collection de **cartes**, réunies en un **atlas** mathématique, indiquant comment passer d'une carte à l'autre. Le globe terrestre fournit un exemple typique de variété, puisqu'il peut être représenté par une collection de cartes géographiques.

Une carte est une portion de la variété analogue à une portion d' espace vectoriel; les changements de cartes indiquent comment ces portions de variétés se raccordent entre elles. Ainsi, pour décrire un cercle il est possible de prendre comme cartes deux arcs qui se chevauchent ; le changement de cartes constitue une information sur le recollement au niveau de la zone de chevauchement.

# Atlas, Cartes, exemple de la Terre

Il n'est généralement pas possible de décrire une variété à l'aide d'une seule carte, parce que la structure globale de la variété est différente de la structure simple de l'espace modèle.

Par exemple, aucune carte « plate » ne peut décrire convenablement la Terre entière.

Les variétés apparaissent comme des espaces topologiques et leurs topologies sont uniquement déterminées par la donnée de leurs atlas respectifs

Suivant la nature des applications de changement de cartes, la variété possède une structure plus ou moins forte: variété topologique, variété différentielle, variété symplectique, variété localement plate par exemple.

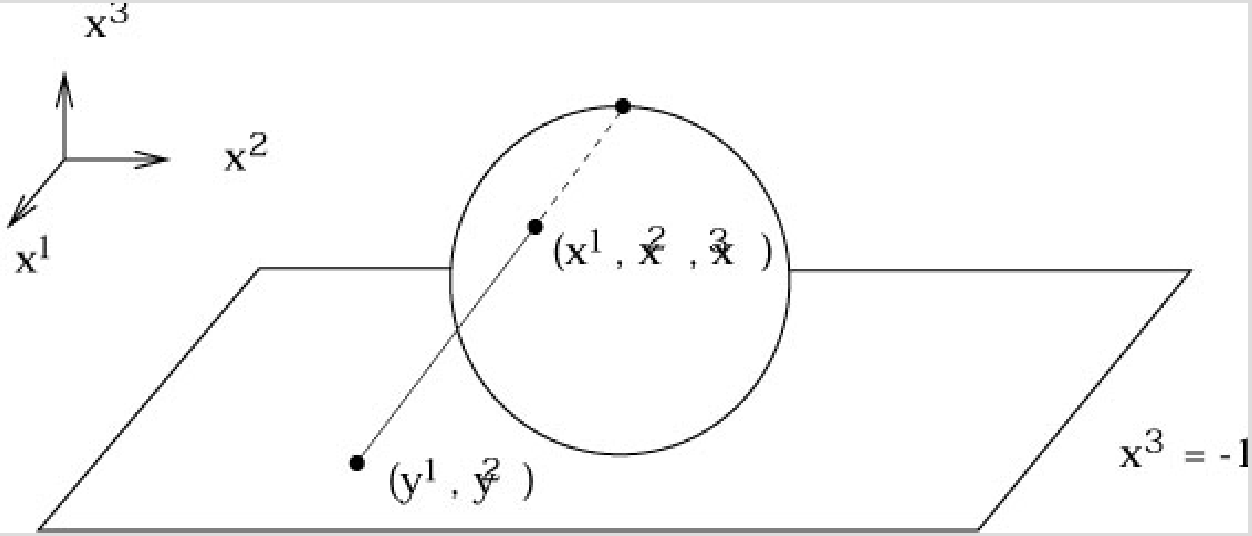
Pour une variété topologique, la donnée d'un atlas équivaut simplement à la donnée d'une topologie dont les ouverts suffisamment petits s'identifient à l'espace plat. Pour les structures plus fines citées, l'introduction de cartes est indispensable pour les définir.

# Réalisation d'une carte

Un exemple significatif est représenté par la sphère $S^2$, où on montre qu' un système de coordonnées unique ne pourra pas couvrir la Variété entière. Une projection de Mercantor ignore les pôles nord et sud ( ainsi que la ligne de changement de date qui implique le même problème que celui soulevé pour $S^1$ (le cercle)).

Considérons $S^2$ comme l'ensemble des points de $R^3$ défini par $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1$.

Nous pouvons construire un système de coordonnées d'un ensemble ouvert $U_1$, défini comme la sphère sauf le pôle Nord , via une projection "stéréographique":



# Réalisation d'une carte

Traçons une ligne droite du pôle Nord vers le plan défini par $x^3 = -1$, qui coupe $S^2$ comme indiqué sur la figure et le plan aux coordonnées cartésiennes $(y^1, y^2)$. La carte correspondante est donnée explicitement par :

$$\Phi_1(x^1, x^2, x^3) \equiv (y^1, y^2) = \{ 2x^1/(1-x^3), 2x^2/(1-x^3)\}$$

Un autre système de coordonnées $(U_2, \Phi_2)$ est obtenu de façon symétrique en projetant depuis le pôle sud la sphère sur le plan défini $x^3 = +1$. Les coordonnées résultantes couvrent la sphère moins le pôle sud et sont données par : $$\Phi_2(x^1, x^2, x^3) \equiv (z^1, z^2) = \{ 2x^1/(1+x^3), 2x^2/(1+x^3)\}$$

Ensemble ces deux systèmes de coordonnées couvrent la Variété complète, en se recouvrant sur la région $-1 < x^3 < +1$. Ce que vous pouvez également vérifier est que la composition $\Phi_2 \circ \Phi_{-1}$ est donnée par:

$$z^i = 4y^i /([(y^1)^2 + (y^2)^2]$$

Et est du type $C^\infty$ dans la région de recouvrement. Dans cette région cette formule apparaît comme un changement de coordonnées.

# Règle de Chaînage des dérivées partielles

Le fait que les variétés se comportent localement comme $R^n$, ce qui se manifeste par la construction des systèmes de coordonnées, introduit la possibilité d'analyse sur les Variétés , par des opérations telles que la différentiation et l'intégration.

Considérons deux Variétés $M$ et $N$ de dimensions $m$ et $n$, avec des systèmes de coordonnées $\Phi$ sur $M$ et $\Psi$ sur $N$. Imaginons que nous avons une fonction $f : M \rightarrow N$.

Considérons $M$ et $N$ comme des ensembles, nous ne pouvons pas différencier l'application $f$, car nous ne savons pas ce que cette opération signifie.

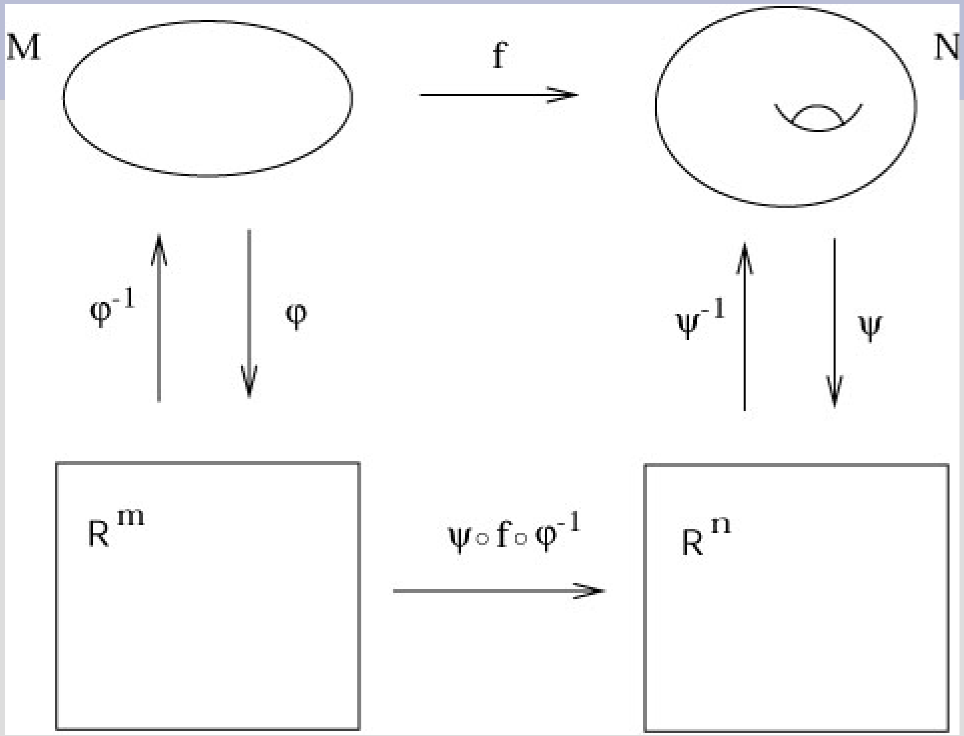
Mais les systèmes de coordonnées vont nous permettre de construire l'application $(\Psi \circ f \circ \Phi^{-1}): R^m \rightarrow R^n$ (où l'application est définie bien sûr et où c'est approprié!.). C'est juste une application entre espaces euclidiens et tous les concepts du calcul différentiel s'appliquent.

Par exemple $f$, considéré comme une fonction à $n$ arguments sur $M$, peut être différenciée pour obtenir $\partial f / \partial x^\mu$, où $x^\mu$ représente $R^m$. Remarquons que cette notation est abrégée et si on développe on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x^\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(x^\mu) \ .$$

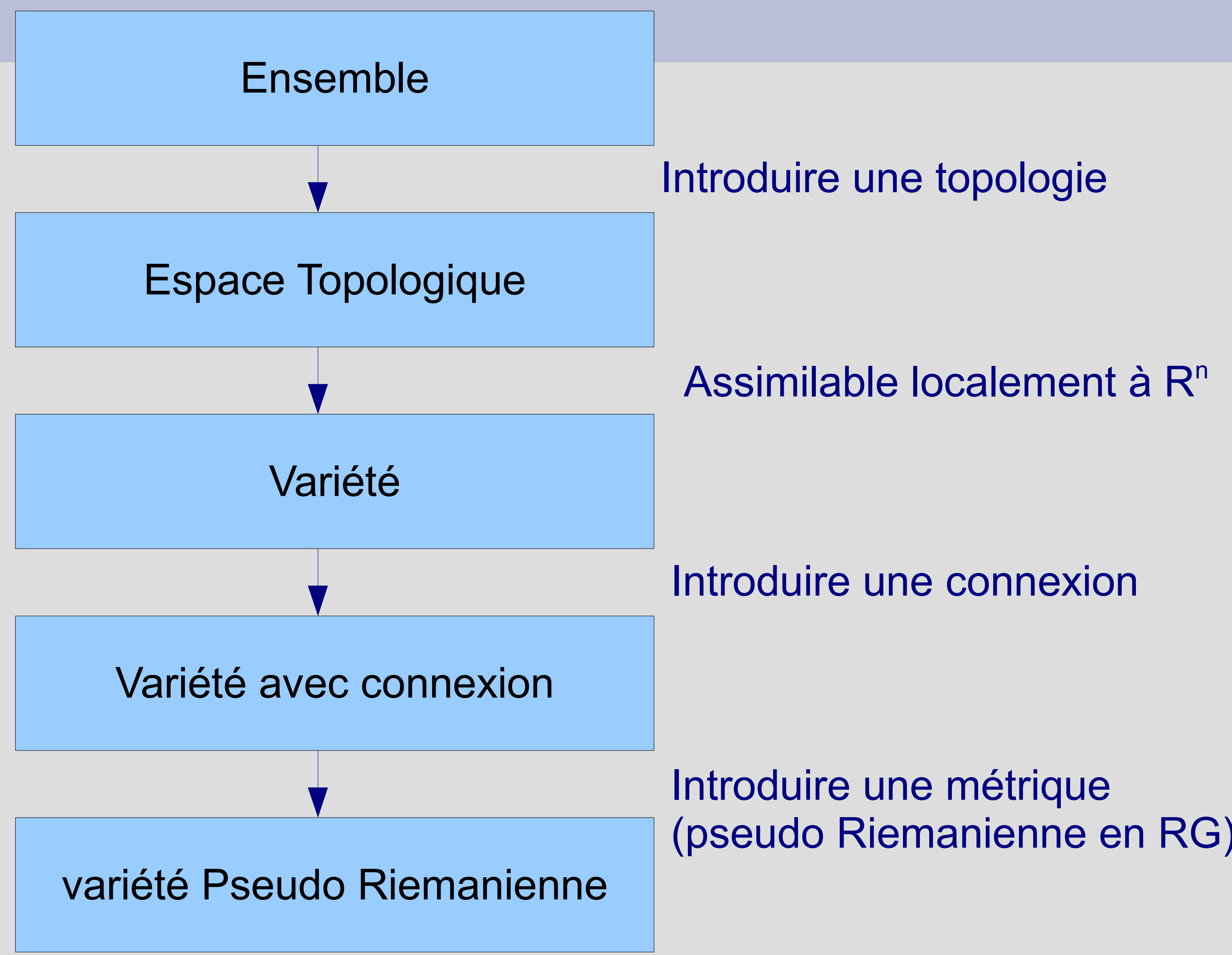
# Règle de Chaînage des dérivées partielles

- Le diagramme symbolique illustrant l'opération est représenté ci dessous.



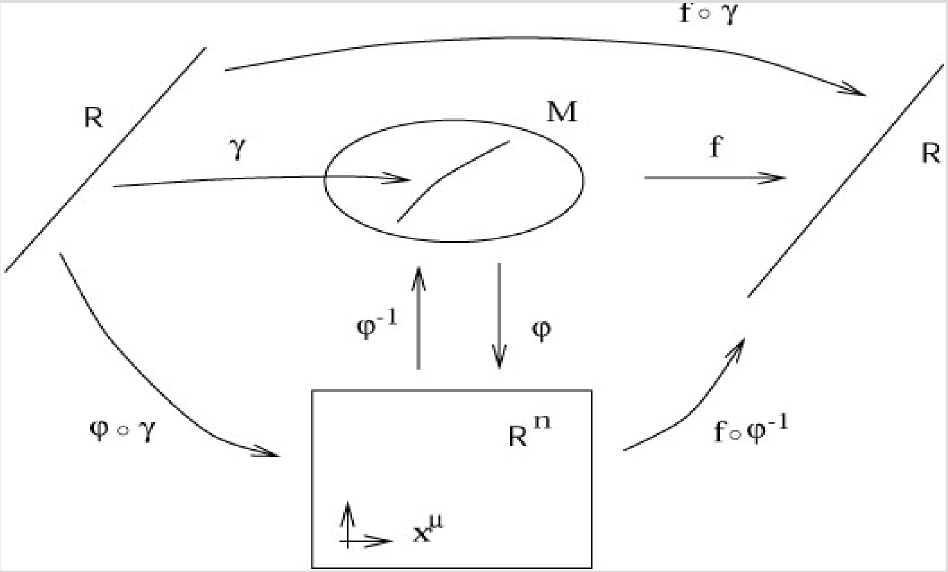

- Tout ce que nous venons de présenter n'a pour but que de montrer la validité des opérations que nous allons effectuer. Maintenant nous sommes en mesure d'habiller la variété en introduisant des vecteurs , des tenseurs des connexions et autres concepts . Nous ne donnerons pas le détail de cette validation et allons nous intéresser aux tenseurs.

# Variété: Synthèse construction



# Vecteurs et tenseurs sur une variété.

- Comme ce qui précède le laisse présager, l'introduction rigoureuse de ces concepts fait appel à ce que nous avons établi précédemment.
- Commençons par les vecteurs: Le diagramme ci dessous illustre comment on définit un vecteur sur une variété. Sur une courbe $\gamma$ tracée sur la variété M, l'ensemble des réels *R* (à gauche) permet de définir un point de paramètre affine $\lambda$.
- On définit une fonction sur M ce qui donne en ce point une valeur (application vers R à droite) et on peut définir la dérivée de cette fonction par rapport à $\lambda$ dans R (opérations sur réels). On voit que un vecteur est associé à l'opérateur dérivée (que nous avons déjà défini). On peut aussi définir ses coordonnées (géométrie analytique) par l'application de M vers $R^n$. Bref, la routine!

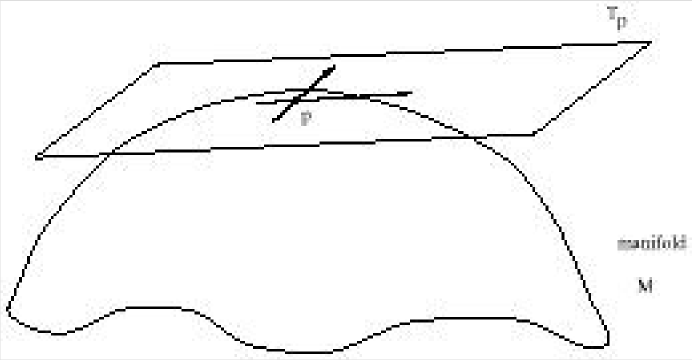


# Vecteurs et tenseurs sur une variété.

Dans notre espace à quatre dimensions les vecteurs auront quatre composantes, et souvent on les appelle des 4-vecteurs. Ceci n'est pas neutre, par exemple il n'existe pas de "*produit vectoriel* " entre deux 4-vecteurs.

En plus de la dimension , le point important à souligner est que chaque vecteur est localisé à un certain point de l'espace temps. Nous connaissons bien les vecteurs libres, s'étendant d'un point de l'espace à un autre, que l'on peut translater ad libidum dans l'espace, et les vecteurs liés, s'étendant du point $p$ de l'espace à un autre point $q$, avec une origine $p$ bien déterminée. Ces concepts ne sont pas utilisables en Relativité.

**Espace tangent**: A la place, nous associerons à chaque point $p$ de l'espace temps, l'ensemble de tous les vecteurs qui passent par ce point, que nous appellerons **l'espace tangent** en $p$ , soit $T_p$. Ce nom est inspiré par l'analogie à l'ensemble des vecteurs passant par $p$ qui génèrent le plan tangent en $p$ à une surface à deux dimensions courbée.



# Vecteurs et tenseurs sur une variété.

Mais inspiration mise à part, l'important est que ces vecteurs soient localisés en un point et ne s'étendent pas d'un point vers un autre ( même si pour des raisons de commodité, nous ne nous priverons pas de les représenter sous forme de flèche dans des diagrammes spatio temporels, la direction est significative, mais la longueur représente un autre paramètre qu'une mesure de l'espace temps)

**Espace vectoriel:** Un **espace vectoriel,** rappelons le, est un ensemble d'objets ( vecteurs) qui peuvent être comparés, additionnés ( muni d'une structure de groupe) et multipliés par des nombres réels de façon linéaire. Pour deux vecteurs quelconques $V$ et $W$ et des nombres $a$ et $b$ nous avons :

$$(a + b) (V + W) = aV + bV + aW + bW.$$

Chaque espace vectoriel a une origine ( vecteur nul) qui est l'élément neutre vis à vis de l'addition vectorielle. Beaucoup d'espaces vectoriels possèdent aussi un produit scalaire, qui est une fonctionnalité supplémentaire non indispensable.

Un vecteur est un objet géométrique parfaitement défini, comme un champ de vecteurs qui est défini comme un ensemble de vecteurs tel qu'il y ait un vecteur à chaque point de l'espace temps. L'ensemble des espaces tangent d'une variété M est appelée le **faisceau tangent** $T(M)$.

# Vecteurs et tenseurs sur une variété.

**Vecteurs de base:** La géométrie analytique étant un outil puissant pour traiter concrètement les opérations sur les vecteurs nous allons représenter un vecteur par ses composantes sur un ensemble de vecteurs de base.

Une base est un ensemble de vecteurs qui couvre tout l'espace vectoriel ( chaque vecteur est une combinaison linéaire des vecteurs de base) et qui sont linéairement indépendants les uns des autres ( aucun n'est une combinaison linéaire des autres). Pour un espace vectoriel donné, il y a une infinité des bases valides, mais chaque base va comporter le même nombre de vecteurs, qui correspond à sa dimension. Pour un espace tangent associé à un point dans l'espace de Minkowski, cette dimension est évidemment quatre.

Supposons que pour chaque espace tangent nous ayons établi une base constituée de 4 vecteurs $\hat{e}_{(\mu)}$ avec $\mu = \{0, 1, 2, 3\}$ comme d'habitude. Faisons correspondre la base aux coordonnées $x^\mu$, Alors le vecteur de base $\hat{e}_{(1)}$va être porté par l'axe des $x$, etc..

Même s'il n'est pas nécessaire de choisir la base adaptée au système de coordonnées, c'est souvent bien pratique. Nous pourrions être plus précis ici, mais comme ce point va être examiné plus loin on peut se permettre de rester un peu vague. Chaque vecteur A va être écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs de base :

$$A = A^\mu \hat{e}_{(\mu)}$$

# Vecteurs et tenseurs sur une variété.

**Composantes d'un vecteur (dans une base):** Les coefficients $A^\mu$ sont les **composantes** du vecteur $A$. La plupart du temps, on omet la base et on se réfère au vecteur "$A^\mu$", mais gardons à l'esprit que c'est un raccourci.

**Le vecteur réel est un objet géométrique, alors que les composantes ne sont que les coefficients des vecteurs de base dans la base choisie.**

Comme nous omettons les vecteurs de base, les index vont repérer les composantes des vecteurs et tenseurs. Nous avons mis les index entre parenthèses pour les vecteurs de base pour rappeler qu'il s'agit d'un ensemble de vecteurs et non pas des composantes d'un seul vecteur.

Vecteur tangent: Le vecteur tangent à une courbe de l'espace temps est un exemple typique de vecteur. Une courbe ou un chemin paramétré de l'espace temps est spécifié par ses coordonnées, fonction d'un paramètre, par exemple $x^\mu(\lambda)$. Le vecteur tangent $V(\lambda)$ a les composantes :

$$V^\mu = dx^\mu / d\lambda$$

Le vecteur lui même est défini par: $V = V^\mu . \hat{e}_{(\mu)}$.

# Vecteurs et tenseurs sur une variété.

## Espace tangent:

Rappelons que l'espace tangent est l'ensemble de tous les vecteurs en un point de l'espace temps. Un vecteur n'est pas un objet qui s'étend entre deux points de l'espace, mais un objet associé à un point. Cette définition nous fait temporairement abandonner des notions concrètes comme "le vecteur pointe dans la direction des x " puisque l'espace tangent est simplement un espace vectoriel en chaque point, ce qui est assez abstrait. Il est temps de remédier à cela. Imaginons que nous voulions construire l' espace tangent en un point $p$ d'une Variété $M$ en n'utilisant que des choses intrinsèques à $M$. ( Sans l'imbriquer dans des espaces de dimensions supérieures etc..).

## Vecteurs tangents

Notre première idée serait d'utiliser notre connaissance intuitive qu'il y a des objets appelés "vecteurs tangents à des courbes" qui appartiennent à l'espace tangent. Si nous considérons l'ensemble de toutes les courbes paramétrées passant par $p$ qui est l'espace de toutes les cartes ( non dégénérées) $g{:}R \rightarrow M$ , telles que $p$ est dans l'image de $g$. On est tenté de définir l'espace tangent comme généré par tous les vecteurs tangents à ces courbes en $p$. La démonstration rigoureuse utilise la méthode ensembliste que nous avons décrite précédemment, mais nous admettrons le résultat.

# Vecteurs sur une variété, loi de transformation.

Dans l'espace tangent sont définis les vecteurs (contravariants) qui forment un espace vectoriel qui nous sont familiers sous le vocable « vecteurs ».

**Loi de transformation des vecteurs tangents (ou contravariants)**

Un des avantages de la démarche abstraite que nous avons suivi pour les vecteurs est que la loi de transformation est immédiate. Comme les vecteurs de base sont $\hat{e}(\mu) = \partial_\mu$, les vecteurs de base dans un nouveau système de coordonnées $x^{\mu'}$ sont données par la règle de chaînage (2.3) par :

$$\partial_{\mu'} = (\partial x^\mu / \partial x^{\mu'}) \partial_\mu$$

Nous pouvons obtenir la loi de transformation par la même méthode qu'en espace plat, puisque le vecteur est invariant par un changement de coordonnées

$$V = V^\mu \partial_\mu = V^{\mu'} \partial_{\mu'} = V^{\mu'} (\partial x^\mu / \partial x^{\mu'}) \partial_\mu,$$

où $V^\mu$ et $V^{\mu'}$ sont les composantes de $V$ dans les bases $\partial_\mu$ et $\partial_{\mu'}$. Comme $(\partial x^\mu / \partial x^{\mu'})$ est inversible ceci donne:

$$V^{\mu'} = (\partial x^{\mu'} / \partial x^\mu) V^\mu.$$

# Transformation formes linéaires sur une variété,

Dans l'espace cotangent sont définis les vecteurs (appelés covariants) qui forment un espace vectoriel qui nous sont familiers sous le vocable «formes linéaires ». De même que l'espace tangent en un point *p* d'une variété était défini par l'ensemble des vecteurs en *p*, l'espace cotangent est défini par l'ensemble des formes linéaires (vecteurs cotangents) qu'on peut définir en *p*.

Un des avantages de la démarche abstraite que nous avons suivi pour les vecteurs est que la loi de transformation est immédiate. Comme les vecteurs de base sont $dx^{\mu}$, (ce sont les gradients des coordonnées) les vecteurs de base $dx^{\mu'}$ dans un nouveau système de coordonnées $x^{\mu'}$ sont données par la règle de chaînage par :

$$dx^{\mu'} = (\partial x^{\mu'}/\partial x^{\mu})dx^{\mu}$$

Nous pouvons obtenir la loi de transformation par la même méthode qu'en espace plat, puisque le vecteur covariant est invariant par un changement de coordonnées:

$$\omega = \omega_{\mu} dx^{\mu} = \omega_{\mu'} dx^{\mu'} = \omega_{\mu'}(\partial x^{\mu'}/\partial x^{\mu})dx^{\mu}$$

où $\omega_{\mu}$ et $\omega_{\mu'}$ sont les composantes de $\omega$ dans les bases $dx^{\mu}$ et $dx^{\mu'}$. Comme $(\partial x^{\mu'}/\partial x^{\mu'})$ est inversible ceci donne: $\omega_{\mu'} = (\partial x^{\mu}/\partial x^{\mu'})\omega_{\mu}$

# Tenseurs sur une variété,

La loi de transformation pour les tenseurs suit le même schéma, simplement nous remplacerons la matrice de transformation de Lorentz utilisée en espace plat par une matrice représentant une transformation plus générale de coordonnées.

Un tenseur T de variance (*k, l* ) peut être développé comme suit :

$$T = T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}\partial_{\mu_1}\otimes\cdots\otimes\partial_{\mu_k}\otimes \mathrm{d}x^{\nu_1}\otimes\cdots\otimes \mathrm{d}x^{\nu_l} \ ,$$

Par un changement de coordonnées les composantes se transforment selon.

$$T^{\mu'_1\cdots\mu'_k}{}_{\nu'_1\cdots\nu'_l} = \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}}\cdots\frac{\partial x^{\mu'_k}}{\partial x^{\mu_k}}\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu'_1}}\cdots\frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial x^{\nu'_l}}T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l} \ .$$

Cette loi de transformation est simple à se rappeler du fait que cela ne peut pas donner autre chose compte tenu du placement des index. Cependant, il est souvent plus simple de transformer un tenseur en considérant les vecteurs de base et les formes monolinéaires comme respectivement les dérivées partielles et les gradients et en substituant simplement dans la transformation de coordonnées.