Etablissement de l'équation d'Einstein

Maintenant que nous avons établi comment les lois de la physique de l'espace Euclidien peuvent être transposées dans un espace courbé, nous sommes en mesure de finir d'établir la théorie de la Relativité en introduisant les équations du champ d'Einstein qui régissent l'action de l'énergie et de la quantité de mouvement sur la métrique.

Nous allons utiliser deux méthodes différentes pour cela.

Première méthode : ***Généralisation de l'équation de Poisson***

La première méthode (la plus simple) repose sur l'approche originale d'Einstein, plus intuitive que formelle et la seconde plus formelle sur la minimisation de l'action.

Einstein cherchait à généraliser l'équation de Poisson valable en mécanique Newtonienne, rappelée ci dessous

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho \ , \qquad (35)$$

Où $\nabla^2 = \delta^{ij}\partial_i\partial_j$ est le Laplacien (espace) et ρ est la densité de masse. En mécanique newtonienne: $\Phi = -GM/r$ (22)

est une solution de (35), dans le cas de distribution de masse " ponctuelle".

Quelles autres caractéristiques, l'équation que nous recherchons doit elle posséder?

Dans le terme de gauche de (35) nous avons un opérateur différentiel au deuxième ordre du potentiel gravitationnel et le terme de droite décrit la répartition de masse.
La généralisation Relativiste doit s'exprimer en termes de relations entre tenseurs.

Nous savons que la généralisation tensorielle d'une densité de masse est le tenseur énergie impulsion $T_{\mu\nu}$, alors que le potentiel gravitationnel doit être remplacé par un tenseur dépendant de la métrique.

Il est alors naturel de poser $T_{\mu\nu}$ proportionnel à un tenseur contenant des dérivées d'ordre deux de la métrique.

Dans la limite newtonienne avec $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ et $T_{00} = \rho$, les composantes spatiales sont négligeables par rapport à la composante temporelle, (facteur c), l'équation se réduit à:

$$\nabla^2 h_{00} = -8\pi G T_{00} \ , \qquad (36)$$

Mais bien sûr, cette équation doit être tensorielle.

Le membre de gauche de (36) ne se généralise pas de façon évidente à un tenseur.

Une première tentative consiste à appliquer le d'Alembertien $\Box = \nabla^\mu \nabla_\mu$ sur la métrique $g_{\mu\nu}$, mais cela donne identiquement zéro, par principe, compte tenu de la nature du tenseur métrique.

Par chance, nous connaissons le tenseur de Riemann $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$. construit à partir des dérivées premières et secondes de la Métrique et qui, lui, n'est pas identiquement nul. Il n'a pas le bon nombre d'indices mais on peut le contracter pour former le tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$ qui convient et est de plus symétrique.

A ce point on peut raisonnablement penser que les équations du champ sont:

$$R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \ , \qquad (37)$$

Avec une constante dimensionelle d'ajustement κ .

En fait Einstein proposa cette équation. Un problème de taille pourtant concernant la conservation de l'énergie. Conformément au principe d'équivalence la conservation de l'énergie Impulsion dans un espace courbe s'écrit

$$\nabla^{\mu} T_{\mu\nu} = 0 \, , \qquad (38)$$

Ce qui implique

$$\nabla^{\mu} R_{\mu\nu} = 0 \, . \qquad (39)$$

Ce qui n'est certainement pas vrai dans une géométrie arbitraire. Rappelons que l'identité de Bianchi implique

$$\nabla^{\mu} R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \nabla_{\nu} R \, . \qquad (40)$$

Si (39) est exact alors (40) implique $\boldsymbol{\nabla_{\nu} R = 0}$ (40 bis)

Comme l'équation (37) que nous proposons implique (en la multipliant par $g^{\mu\nu}$) que*:*
$R = \kappa \, g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = \kappa \, T$, en prenant aussi en compte les contraintes (39) et (40 bis), nous avons :

$$\nabla_\mu T = 0 \,. \qquad (41)$$

La dérivée covariante d'un scalaire est égale à sa dérivée partielle, donc (41) nous dit que T est constant dans l'espace temps, ce qui est hautement non plausible car $T = 0$ dans le vide et $T > 0$ en présence de matière. Il faut trouver autre chose.

En fait , on triche un peu en prenant l'équation $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$, à la lettre. Si, comme on l'a dit , le principe d'équivalence n'est vrai qu'en première approximation, on peut imaginer qu'il y a des termes non nuls dans le membre de droite concernant le tenseur de courbure.

Nous préciserons ce point ultérieurement pour montrer qu'ils doivent être strictement nuls.

En fait la solution saute aux yeux puisqu'on connaît un tenseur (0, 2) symétrique construit à partir du tenseur de Ricci qui est conservé par construction: le tenseur d'Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \,, \qquad (42)$$

Qui satisfait toujours $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$. Nous sommes conduit à proposer :

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \qquad (43)$$

comme équation du champ pour la métrique.

Cette équation remplit toutes les conditions requises: Le terme de droite est l'expression covariante de la densité d'énergie impulsion sous forme d'un tenseur (0, 2) symétrique et satisfaisant au principe de conservation, tandis que le membre de gauche est aussi un tenseur (0,2) symétrique et satisfaisant au même principe de conservation construit sur les dérivées premières et secondes de la métrique.

Regardons comment cela rend compte de la gravitation telle que nous la connaissons.
Pour ce faire contractons les deux membres, (43) donne (en quatre dimensions):

$$R = -\kappa T \ , \qquad (44)$$

Utilisons ce résultat et reportons dans (43) alors:

$$R_{\mu\nu} = \kappa(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}T g_{\mu\nu}) \; . \qquad (45)$$

C'est la même équation , juste écrite différemment.

La limite Newtonienne

On aimerait vérifier que cela prédit bien la loi de la gravitation de Newton dans les hypothèses idoines.

Dans ces conditions l'énergie de la matière au repos $\rho = T_{00}$ est très supérieure aux autres termes de $T_{\mu\nu}$ on va se focaliser sur le composant $\mu = 0$, $\nu = 0$ de (45). Dans la limite du champ faible on écrit conformément à (13) et (14))

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1 + h_{00} \; , \\ g^{00} &= -1 - h_{00} \; . \end{aligned} \qquad (46)$$

La trace du tenseur énergie impulsion au premier ordre est:

$$T = g^{00} T_{00} = -T_{00} \ . \qquad (47)$$

Reportons la dans (45),on obtient:

$$R_{00} = \frac{1}{2} \kappa T_{00} \ . \qquad (48)$$

Cette équation relie les dérivées de la métrique à la densité d'énergie. Pour trouver l'expression explicite en termes de métrique nous devons évaluer $R_{00} = R^{\lambda}{}_{0\lambda\,0}$. En fait nous n'avons besoin que de $R^{i}{}_{0i0}$, car $R^{0}{}_{000} = 0$. Ceci donne:

$$R^{i}{}_{0j0} = \partial_j \Gamma^{i}_{00} - \partial_0 \Gamma^{i}_{j0} + \Gamma^{i}_{j\lambda} \Gamma^{\lambda}_{00} - \Gamma^{i}_{0\lambda} \Gamma^{\lambda}_{j0} \ . \qquad (49)$$

Le second terme est une dérivée par rapport au temps qui est nulle pour le champ statique. Le troisième et quatrième sont d'ordre supérieur et peuvent être négligés.

Il nous reste $R^{i}{}_{0j0} = \partial_j \Gamma^{i}{}_{00}$. De ceci on tire:

$$\begin{aligned} R_{00} &= R^i{}_{0i0} \\ &= \partial_i \left(\frac{1}{2} g^{i\lambda} (\partial_0 g_{\lambda 0} + \partial_0 g_{0\lambda} - \partial_\lambda g_{00}) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \eta^{ij} \partial_i \partial_j h_{00} \\ &= -\frac{1}{2} \nabla^2 h_{00} \ . \end{aligned} \qquad (50)$$

En comparant à (48), on voit que la composante 00 de (43) en limite Newtonienne prédit

$$\nabla^2 h_{00} = -\kappa T_{00} \ . \qquad (51)$$

Et c'est exactement (36), si on pose $\kappa = 8\pi G$.

Notre intuition nous a guidée utilement. Avec cette normalisation liée aux conditions aux limites Newtoniennes, nous avons maintenant complètement déterminé l'équation d'Einstein

L'équation d'Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \ . \qquad (52)$$

Elle nous dit comment la courbure de l'espace temps réagit en présence d'énergie impulsion.
Einstein trouvait le membre de gauche géométrique de l'équation sympathique tandis que celui de droite paraissait quelque chose de moins contraignant.

La signification de l'équation d'Einstein et ses contraintes

On peut voir les équations d'Einstein comme des équations différentielles du second ordre sur le tenseur de champ métrique $g_{\mu\nu}$. Il y a en principe dix équations indépendantes (tous les tenseurs à deux indices de l'équation sont symétriques), ce qui parait bien correspondre aux 10 fonctions inconnues de la métrique à déterminer (sur les vingt du tenseur de Riemann).
Mais comme l'identité de Bianchi $\nabla^{\mu}G_{\mu\nu}= 0$ représente quatre contraintes sur les fonctions $R_{\mu\nu}$, il n'y a en réalité que six équations indépendantes dans (52). Ce n'est pas fortuit, car si une métrique est solution de l'équation d'Einstein dans un système de coordonnées x^{μ} , elle le sera dans tous
Cela signifie qu'il y a 4 degrés de liberté non physiques dans $g_{\mu\nu}$ représentés par les 4 fonctions $x^{\mu'}$ (x^{μ}), et nous que devons escompter que l'équation d'Einstein ne va contraindre que 6 degrés de liberté.

Ces équations différentielles sont en général cauchemardesques à résoudre , les scalaires et tenseurs de Ricci sont des contractions du tenseur de Riemann, qui incluent les dérivées et les produits des symboles de Christoffel, qui eux mêmes sont construits sur le tenseur métrique inverse et sur les dérivées du tenseur métrique. Pour corser le tout, le tenseur énergie impulsion $T_{\mu\nu}$ va généralement invoquer également la métrique.

En prime, les équations sont non linéaires, ce qui fait que si on connaît deux solutions, pas question d'espérer en trouver une troisième à partir d'elles.

Il est donc très difficile de résoudre les équations d'Einstein dans le cas général et on doit souvent s'appuyer sur des hypothèses simplificatrices.

Même dans le vide ou le tenseur énergie impulsion est nul, l'équation correspondante tirée de (45)

$$R_{\mu\nu} = 0 \qquad (53)$$

peut être très difficile à résoudre.

Les simplifications les plus courantes stipulent un degré de symétrie significatif, et nous verrons comment cela facilite la vie.

Etablissement des équations d'Einstein : Deuxième méthode par application du principe de moindre action d'Hilbert

Pour conforter notre confiance en les équations d'Einstein que nous avons établies, comme lui, intuitivement, et s'assurer qu'elles sont les bonnes équations du champ pour la métrique, montrons comment on procède aujourd'hui dans le contexte de la physique moderne.
On les dérive simplement du principe de moindre action (d'Hilbert).

L'action d'Hilbert

Cette action, fort justement appelée action d'Hilbert est l'intégrale sur l'espace temps de la **densité** de Lagrange ("Lagrangien en abrégé, ce qui est un abus de langage, puisque que pour être précis le Lagrangien est l'intégrale sur l'espace temps de la densité de Lagrange).

$$S_H = \int d^n x \mathcal{L}_H \; . \qquad (54)$$

La densité de Lagrange est une densité de tenseur, type d'objet mathématique qui s'obtient en multipliant $\sqrt{-g}$ (g est le déterminant du tenseur) par un scalaire .

Quel scalaire dérivant de la métrique doit on prendre ? Comme nous savons que les dérivées premières de la métrique peuvent être annulées en la mettant sous sa forme canonique, le scalaire en question, pour être utile, doit invoquer au moins les dérivées secondes de cette métrique. Rappelons que le tenseur de Riemann décrit complètement la courbure de l'espace temps (hors torsion, que nous ne considérons pas dans cette équation). Il est construit sur les dérivées premières et secondes de cette métrique.

Le scalaire de Ricci *R* est le seul scalaire indépendant dérivant de ce tenseur.

Il résulte d'une double contraction de ce tenseur. Il paraît tout indiqué. Hilbert a donc pensé que ce serait le choix le plus simple pour le Lagrangien et il proposa:

$$\mathcal{L}_H = \sqrt{-g}R \,. \qquad (55)$$

Les équations du mouvement vont résulter de la variation de cette action dans le cadre de la métrique. Nous ne développerons pas le calcul voir: http://www-cosmosaf.iap.fr/MIT-RG4F.pdf