Principe de représentation - Auto-dualité théorique

Résumé

Nous soutenons que la recherche de la théorie ultime de la physique peut être modélisé mathématiquement comme la recherche d'un système algébrique avec comme propriété que l'ensemble de toutes les représentations forme un système algébrique isomorphe à l'original. Les exemples les plus simples de systèmes algébriques, possédant ces propriétés, sont identifiés avec les théories correspondantes de la physique. Le développement philosophique est conduit sous la forme d'une thèse de type kantien.

Mots clés : principe, théorie de la représentation, auto-dualité, Pontryagin, Kant, structure algébrique, algèbre de Hopf, catégorie, mécanique quantique, gravitation.

1. Introduction et préliminaires

Introduction

La physique théorique est la recherche d'un ensemble complet cohérent de lois fondamentales de la physique. Dans cet article, nous proposons une démarche pour développer une thèse kantienne visant à montrer que la structure ultime, à savoir l'ensemble de lois à prendre en compte par les physiciens, ne fait que refléter les structures autorisées par les contraintes de la pensée du physicien.

Cet objectif à long terme n'est pas une idée nouvelle. Il y a une longue tradition établie en physique théorique selon laquelle on espère que certains principes ou « conditions *a priori* de la pensée physique » comme la « localité », la « causalité » et la « re-normalisabilité » peuvent servir à réduire l'éventail des théories physiques permises. Voir, par exemple, référence 1.

L'objectif idéal dans cette tradition serait de trouver un ou plusieurs de ces principes suffisamment puissants pour contraindre les théories permises à une seule, et une qui est en accord avec l'expérience. Dans cet article, nous introduisons un principe nouveau et inhabituel de ce type, le " Principe de représentation - Théorie auto-duale." Contrairement aux principes les plus familiers de la « localité », etc. rappelées ci-dessus, ce principe est global: il concerne la totalité de la structure algébrique de la théorie d'un point de vue très général, et s'appuie philosophiquement sur la distinction entre réalité et représentations de la réalité.

Après avoir expliqué le principe, nous montrons tour à tour son caractère nécessaire et suffisant étayant notre argumentation par des preuves historiques. Naturellement, nous discutons de la place de l'ensemble de ce programme au sein de l'idéalisme transcendantal de Kant. Il convient de souligner que le principe et les arguments que nous présentons ici, s'ils ne constituent qu'une première ébauche pour caractériser la pensée physique, ont vocation à se développer dans un formalisme à construire plus sophistiqué. Il constitue la motivation à long terme qui sous-tend les travaux techniques (2) - (8).

Un aperçu de l'article est le suivant. La section 2 introduit un chapitre intéressant des mathématiques sur lequel l'article s'appuie, un théorème de Pontryagin et ses généralisations. Soit S un groupe abélien et notons $\widetilde{S}$ l'ensemble de toutes ses représentations. Alors, tout d'abord, sous certaines restrictions techniques, $\widetilde{S}$ est également un groupe abélien, le groupe dual, et $\widetilde{\widetilde{S}}$ est un groupe isomorphe à S. C'est une propriété remarquable de la catégorie des groupes abéliens. La catégorie est « auto-duale ». Deuxièmement, dans cette catégorie, certains groupes S ont une propriété particulière telle que $\widetilde{S}$ lui-même est isomorphe à S. Ces groupes sont « auto-duaux ». Ces mêmes notions prennent tout leur sens en se généralisant largement. Il apparaît que certaines des rares structures auto-duales disponibles sont celles qui sont utilisées dans une approche algébrique de la mécanique quantique combinée à la gravitation [(2), (3), (5), (6)] et dans d'autres travaux plus récents concernant la théorie des cordes et la théorie des champs conformes [(7), (8)]. Ces considérations nous amènent à formuler le principe de (représentation- théorique) d'auto-dualité :

Une théorie complète cohérente de la physique doit avoir une structure auto-duale dans le sens que nous avons décrit.

Dans cet article, lorsque nous parlons « d'auto-dualité » c'est dans le sens de « représentation théorique » tel que nous venons de le définir.

Dans la section. 3, nous soutenons la nécessité de ce principe: pourquoi devrions-nous accepter ce principe ?

Un argument kantien transcendantal est présenté en deux étapes. La première partie analytique soutient que les modèles issus de la physique théorique peuvent toujours être considérés de façon équivalente comme étant auto-duaux. Par conséquent, si la physique théorique revendique de modéliser objectivement la réalité, la bonne théorie doit nécessairement pouvoir s'exprimer par une formulation auto-duale.

L'argument est basé sur un modèle théorique et l'expérience, un modèle qui joue le rôle de celui qui est joué chez Kant dans sa théorie du jugement. Un tel modèle est nécessaire afin de définir ce qu'on entend par « pensée physique ». La deuxième étape dynamique de l'argument soutient qu'un modèle, invoquant l'interaction entre les théoriciens et les expérimentateurs, révèle l'urgence à évoluer vers de telles formulations auto-duales. Dans ce modèle, nous soutenons que l'émergence des théories physiques est stimulée par la dialectique résultant de la distinction entre « représentation » et « représenté » et par une nécessité esthétique d'unification.

Dans la section 4, nous développons le caractère suffisant du principe : La contrainte d'auto-dualité des structures se révèle importante, car il y a peu de telles structures mathématiques disponibles. Ainsi, avec l'aide de quelques principes subsidiaires tels que « localité », il pourrait se révéler suffisamment sélectif pour déterminer une théorie. Dans les applications familières de « localité », etc., en physique théorique, une grande partie de l'infrastructure algébrique est présupposée. Nous soutenons que le principe de l'auto-dualité, étant de nature très générale et algébrique, il peut forcer cette structure d'ensemble algébrique, là où les principes familiers échouent. Nous constatons que les structures permises sont nécessairement organisées de façon hiérarchique, mais que cette hiérarchie, loin d'être une régression infinie, est celle qui aboutit à l'universalité.

Dans la section. 5, nous considérons les preuves historiques pour le principe à l'œuvre. Nous soutenons qu'il y a une séquence historique d'imbrication des théories physiques construites sur des structures auto-duales de complexité croissante. Ils comprennent l'ancienne théorie quantique, les travaux récents sur la mécanique quantique combinés avec gravitation, [(2), (3), (5), (6)] et des travaux récents sur la théorie des cordes et la théorie des champs conformes sous la forme décrite dans les références. 7 et 8.

Le document se termine par une indication de la poursuite des travaux qui resteraient à faire. Puisque la pensée physique est, après tout, la pensée humaine, le principe devrait être contenu dans une thèse globale d'une ampleur comparable à celle de Kant. Nous aimerions être en mesure de la déduire logiquement seulement des « conditions intellectuelles de l'entendement ». En outre, le mécanisme proposé dans la section 3 suggère qu'il fournit un cadre possible au sein de laquelle il serait intéressant d'analyser l'histoire des sciences.

Préliminaires:

Un langage commode pour formuler les constructions mathématiques est la théorie des catégories [(9)]. En termes non techniques, une catégorie est une collection d'objets S_1, S_2,... ayant une structure d'un certain type et, pour deux objets quelconques, d'un ensemble Mor (S_1, S_2) de " morphismes " ou « flèches ». Ceux-ci sont dotés de propriétés analogues à des « cartes » de S_1 vers S_2, en préservant la structure. Sauf dans la section 5, nous allons essayer de garder la discussion aussi peu technique que possible afin de se concentrer sur l'approche philosophique.

Comme la comparaison avec Kant sera inévitable, nous donnons maintenant quelques arguments préliminaires à ce sujet. Les références à Kant se font selon la méthode exposée de manière abordable dans la référence 10.

Rappelons que Kant distingue entre deux modes généraux et mutuellement exhaustifs de la philosophie. Dans le mode transcendantal réaliste, le plus présent chez les physiciens théoriciens, la réalité, les « choses en soi » sont du même type que les apparences ou les « représentations », étant celles qui sont indépendantes des humains. Dans le mode idéaliste transcendantal cet amalgame est absent.

« Les choses en elles-mêmes » sont les choses représentées et ne doivent pas être confondus avec les représentations. Comme nous avons fait une distinction claire entre les représentations et les choses représentées, la thèse de cet article relève de l'idéalisme transcendantal. Notez que l'identification exprimée dans le principe d'auto-dualité est d'une nature différente, à savoir entre les structures et la liste de toutes les représentations de la structure. Par ailleurs, nous verrons dans la section 3.2 que ceci est une identification que Kant a lui-même fait.

Une note sur la portée limitée de la thèse. Nous nous concentrerons sur la pensée physique, plutôt que sur la pensée humaine en général. Cela permet au programme ci-dessus de mieux se prêter à un traitement mathématique. C'est parce que les physiciens théoriques adoptent un cadre mathématique, dans la formulation de théories, que leur structure est plus lisible. Pour un exemple bien connu, dans la définition de la mécanique quantique, non seulement l'équation Schrödinger est postulée, mais toute la structure algébrique de l'acte de mesure, etc. C'est cette tradition axiomatique qui rend la thèse traitable par la méthode de Kant.

La limitation à la pensée physique plutôt qu'à toute la pensée humaine introduit également une complication. Un point clé de l'analyse de Kant, c'est qu'il ne s'applique qu'à la pensée humaine et non à tous les systèmes de pensée imaginables, voir, par exemple, référence 10, p. 83. Ces derniers ne sont pas une alternative réelle pour nous en tant qu'êtres humains. En revanche, revendiquer son application uniquement à la pensée physique laisse en suspens des choix réels des autres formes de pensée.

Ainsi, alors que chez Kant, l'expérience est rendue possible par les conditions de l'entendement humain, pour nous la réalité physique sera accessible par le choix de penser les conditions de la compréhension physique. En outre, une fois que nous acceptons cela, nous devons accepter la possibilité de « sous-réalités » rendues possibles par des " sous-choix " dans la physique, dans son ensemble.

Ce sera justifié à la section 4 où elle est exprimée sous la forme d'une structure hiérarchique de la physique. Par exemple, la mécanique newtonienne, loin d'être obsolète, est bel et bien vivante, mais comme une idéalisation ou « sous-réalité » de la réalité physique, dans laquelle nous entrons lorsque nous choisissons de travailler dans limite où toutes les vitesses sont beaucoup plus petites que la vitesse de lumière. Ainsi, dans nos revendications sur la structure d'une « ultime » théorie de la physique, nous cherchons à comprendre également la structure de ses « sous-réalités » et leurs relations les unes avec les autres.

Ainsi, nous ne considérons pas une thèse de type kantien, mais une hiérarchie de thèses kantiennes, les axiomes de chaque sous-théorie étant les conditions « *a priori* de l'entendement » dans le contexte de la sous-théorie. Appelons la structure complète de chacune « théorie ultime » et les sous-théories avec leurs relations, la « théorie totale de la physique ».

Cette analyse de la totalité de la physique est importante, car elle remplace l'analyse de Kant dans la seconde moitié de la déduction transcendantale et dans le schéma par lequel l'expérience est rendue possible en raison des conditions *a priori* de l'entendement humain. Voir référence 10, chapitres 7 et 8. La différence est qu'en raison de la tradition axiomatique de la physique, il est possible de faire une analyse plus approfondie que celle permise en termes plus généraux.

2. Théorème de Pontryagin ou l'allégorie de la caverne de Platon, revisitée.

Platon se demandait comment des prisonniers, enchaînés dans une caverne, réduits à ne voir de l'extérieur que des ombres sur un mur, pourraient induire que ce ne sont que des ombres de quelque chose qu'ils ne perçoivent pas (référence 11, livre 7, 514a). Si les ombres sur le mur représentent des objets réels, alors comment peut-on récupérer la réalité de la représentation de la réalité ? En outre, si un prisonnier affirme que les ombres sont elles-mêmes la réalité, peut-on lui prouver qu'il a tort ? Lorsque la structure représentée est suffisamment simple, on peut étudier cette question comme suit.

Nous décrivons en détail un théorème de Pontryagin et illustrons son contenu au moyen d'un exemple quotidien. Il sera appliqué de manière plus abstraite à la structure des théories physiques dans la section suivante.

Rappelons qu'un ensemble S a la structure d'un groupe abélien (commutatif) si S est un ensemble d'objets {a, b, c,...} muni d'une multiplication définie de telle sorte que le produit ab appartient à S et a (bc) = (ab) c, ab = ba, $a^{-1}a = 1$, al = a pour tous les éléments a, b, c. Ici, 1 est un élément de S appelé l'identité, et a^{-1} doit être un élément de S et est appelé l'inverse.

Un exemple d'un groupe abélien est, bien sûr, l'ensemble des points sur un cercle. Ceux-ci forment un groupe si l'on pense à chaque point comme défini par un certain angle dans le sens horaire à partir du nord - le groupe « multiplication » qui correspond à l'ajout de ces angles. Nous allons désigner ce « groupe cercle » ou « groupe de rotation » par S^1. Une carte Φ qui associe à chaque élément de S un élément de S^1 de façon à respecter les structures de groupe est appelé une représentation, qu'on symbolise ainsi,

$$S \text{ --- } \Phi \text{---> } S^1, \qquad \Phi\,(ab) = \Phi\,(a)\,\Phi(b),$$

pour tous les a, b, dans S. Ainsi Φ représente le produit des éléments a et b de S sous forme de produit d'éléments Φ(a), Φ(b) de S^1. Notons que comme les ombres citées précédemment, il se peut que la carte associée à Φ envoie de nombreux points de S sur le même point dans S^1. Le mot «représentation» est utilisé un peu différemment que dans la philosophie car pour nous, c'est la carte elle-même qui est la représentation. La forme la plus épurée de ce résultat que nous discuterons, en termes d'entendement humain, est donné par ce qui suit.

Théorème (Pontryagin)[1]: L'ensemble de toutes ces cartes Φ, qui est l'ensemble de toutes les représentations Φ, Ψ, ... de S est appelée $\widetilde{S}$, le dual de Pontryagin de S qui a lui-même la structure d'un groupe abélien. La loi du groupe est

$$\Phi\Psi(a) = \Phi(a)\Psi(a)$$

qui spécifie quel élément de S^1 la carte assigne à tout élément *a* dans S. De plus, si le groupe S n'est pas trop infini[2] alors $S \cong \widetilde{\widetilde{S}}$ [1]. Ici ≅ désigne l'égalité en tant que groupes - les éléments de S et S se correspondent via un dictionnaire approprié, et cette correspondance respecte la structure du groupe. On dit qu'une telle égalité est un isomorphisme des structures.

Il s'agit d'un théorème remarquable, car il dit tout d'abord que l'espace de toutes les représentations du groupe abélien S ont une structure du même type, c'est-à-dire que $\widetilde{S}$ est également dans la catégorie des groupes abéliens, et ensuite que toutes les représentations de ce groupe de représentations de S peut être identifié avec S lui-même. Cela signifie que si un iconoclaste affirme que $\widetilde{S}$ est la réalité, alors ce qu'il appelle la représentation de sa réalité, $\widetilde{\widetilde{S}}$, serait l'équivalent de ce que nous appelons la réalité, S.

Pour voir quelle est cette correspondance entre S et $\widetilde{\widetilde{S}}$ explicitement, soit *a* un membre de S. L'élément correspondant A de $\widetilde{\widetilde{S}}$, c'est cette carte de $\widetilde{S}$ vers S^1 qui envoie un élément typique Φ de $\widetilde{S}$ dans

[1] Le symbole $\widetilde{\widetilde{S}}$ sera utilisé dans tout le texte à la place du symbole S avec double chapeau qui n'est pas disponible dans cette police de caractère.

$$A(\Phi) = \Phi(a).$$

Cette carte renverse les rôles et dit que l'objet *a*, vu par Φ, peut plutôt être considéré comme un observateur A (correspondant directement à l'élément *a*) voyant Φ avec la même valeur Φ(a) = A (Φ).

On peut tenter d'extrapoler cela à des structures plus complexes, par exemple, « tous les moyens pour représenter la structure de l'ensemble de toutes les façons de représenter la structure de Fred (c'est-à-dire les relations entre les particules qui composent Fred) peut être identifié avec Fred lui-même ». Si Fred était un groupe abélien alors, en plus, l'ensemble de toutes les façons de représenter Fred serait également un groupe abélien, Fred, le dual de Fred, peut-être appelé Sally.

Bien sûr, les relations qui composent Fred n'ont pas la structure d'un groupe abélien - très peu de catégories possèdent cette propriété d'appartenir à la catégorie des groupes abéliens. Pour rendre ce théorème et ses généralisations un peu plus concrets, nous allons maintenant donner un exemple.

Supposons qu'il y ait une pièce contenant un cerceau elliptique, d'une certaine forme et une certaine orientation. Soit S l'espace de tous les cerceaux possibles (l'ensemble de toutes les formes et orientations). Considérons des personnes différentes qui entrent dans la pièce et observent le cerceau depuis leur position dans une certaine direction. Dans le cerveau de chacune de ces personnes se forme une image du cerceau, ce qui correspond à un certain état cérébral.

Pour être tout à fait concret, prenons une vision mécaniste: la « personne » pourrait ici pour nos besoins être un robot, par « l'état du cerveau », on entend littéralement un état de ses cellules du cerveau, ce qui, pour notre propos, pourrait être la répartition de la tension dans la circuiterie électrique du robot.

Donc, le rôle de S^1 est joué ici par l'ensemble des états possibles du cerveau d'une seule personne quelconque. Supposons qu'ils aient des cerveaux identiques et les mêmes états initiaux avant leur premier regard sur le cerceau, c'est alors l'emplacement et l'orientation de la personne qui détermine une représentation de S ; tout cerceau réel *a* est relié à un certain état Φ(a) du cerveau de la personne déterminé par l'emplacement et l'orientation Φ. Ainsi, l'ensemble $\widetilde{S}$ des représentations possibles est simplement paramétré par l'emplacement et la direction de vision de l'observateur.

Ensuite, un psychologue interroge chacun des observateurs. Il synthétise dans son cerveau une image constituée de toutes celles des observateurs. Ainsi, dans son cerveau il y a une carte A, de l'ensemble de $\widetilde{S}$ de l'espace des états du cerveau ; il a accumulé dans son cerveau une représentation de $\widetilde{S}$.

Le théorème généralisé affirme que cette représentation A, (qui à l'observateur Φ fait correspondre dans le cerveau du psychologue l'image A (Φ) = Φ (a), est égale à l'image que Φ avait de *a*), correspond à l'élément *a* lui-même. Même s'il n'est pas littéralement *a* (comment pourrait-il littéralement être un cerceau dans l'esprit du psychologue ?) la séquence d'images A correspond à l'élément *a* dans le sens que si l'état de forme et d'orientation du cerceau était objectivement *b,* la séquence d'images B porterait une relation avec A, similaire à celle de *b* vers *a*.

En d'autres termes, c'est le type *a* du cerceau, sa structure qui a été diversement observée, qui a été transférée[3]. L'élément a été littéralement transféré à l'esprit du psychologue, dans le sens où, pour toute séquence d'images A, il y a un seul *a* - déduit par un procédé de triangulation- tel que $\Phi(a) = A\ (\Phi)$ pour tous les observateurs Φ.

De toute évidence, la possibilité de récupérer la structure de la réalité des représentations de la structure en prenant les représentations de la structure de l'espace de toutes les représentations de la structure est une propriété hautement souhaitable pour une théorie physique. Ainsi, les structures de S devraient être dans une catégorie munie d'une opération de dualité, de sorte que si S est un objet de la catégorie, alors $\tilde{\tilde{S}}$, l'espace de toutes les représentations, est une structure mathématique duale et $\tilde{\tilde{S}} \cong S$.

Dans le cas où la catégorie est la catégorie de tous les groupes abéliens (avec la légère restriction technique), nous avons vu ci-dessus et que de plus, $\tilde{\tilde{S}}$ est aussi un objet dans la même catégorie. On dit que cette catégorie est auto-duale. Cette occurrence conduit à la possibilité qu'un iconoclaste pourrait considérer $\tilde{\tilde{S}}$ comme la réalité - il est, après tout, dans la même catégorie d'objets – ce qui ne serait pas un problème de logique dans la mesure où d'autres personnes admettraient que sa réalité est ce que nous appelons les représentations de la réalité et que les représentations S de cet iconoclaste peuvent être identifiées avec ce que nous appelons la réalité.

Un problème se pose quand il n'y a aucun moyen de distinguer clairement ces iconoclastes des autres personnes. Dans le scénario de la caverne, la plupart des gens pourraient considérer les ombres comme une représentation, une action d'une réalité abstraite que les physiciens théoriciens présents voudraient essayer d'induire. Mais d'autres, appelons-les les physiciens expérimentateurs, considéreraient l'observable physique - l'ombre - comme la réalité physique et les abstractions théoriques comme rien de plus qu'un moyen d'organiser et de représenter les données observables.

Notre objectif dans les prochaines sections est de préciser que la nature inhérente du conflit que nous avons évoqué, lié aux points de vue différents, nécessite pour sa résolution que la réalité soit auto-duale $\tilde{\tilde{S}} \cong S$, de sorte que ceux qui considèrent S réel et ceux qui considèrent $\tilde{\tilde{S}}$ réel, en fait, disent la même chose « modulo » le dictionnaire entre S et $\tilde{\tilde{S}}$ qui constitue leur isomorphisme.

3. Nécessité du principe d'auto-dualité

Dans cette section, nous affinerons les considérations énoncées à la fin de la précédente section et soutiendrons qu'elles conduisent tout droit au principe énoncé ci-dessous, qui, selon nous, régit la structure de la pensée physique.

Principe (représentation- théorique) d'auto-dualité:

La recherche d'une théorie complète cohérente de la physique est la recherche d'une structure auto-duale dans la catégorie auto-duale.

Après avoir justifié de manière plausible pourquoi nous devrions accepter le principe, dans les sections 4 et 5, nous l'adoptons comme un postulat, une hypothèse, et nous explorons ses conséquences pour voir si elles sont en accord avec la structure réelle des théories physiques.

La stratégie de la justification est la suivante: dans la section 3.1, nous établirons l'existence de théories auto-duales au moyen d'un artifice mathématique (de sorte qu'à tout moment il existe une formulation auto-duale à rechercher). Nous comparons la démarche avec celle de Kant dans la section 3.2 et poursuivons en section 3.3 en soutenant que la physique ne consiste qu'à tendre en une telle recherche. Nous travaillons uniquement dans un modèle rudimentaire mais suffisant pour établir la plausibilité de ces points.

3.1 Argument Analytique

Nous désignons par Š la liste des *états physiques possibles des choses*, et soit S la liste des concepts théoriques physiques, les « questions qui pourraient être posées » dans une théorie donnée de la physique. On note K l'ensemble des concepts intuitivement acceptables dans lequel une réponse à une question doit se situer. Nous entendons par là des nombres comme des entiers, des fractions, des réels, des réels modulo 2π (par exemple, le cercle S^1, comme évoqué dans la section 2), ou peut-être des matrices de nombres. La liste de concepts théoriques S est définie comme une liste de cartes de Š à K,

$$\check{S} = \{\text{états}\}, \qquad \check{S} \text{ ---concept-->} K. \qquad (1)$$

De plus, cette liste S est doté par la théorie d'une structure « algébrique » composée des relations théoriques entre les concepts. Par exemple, si la masse et l'impulsion sont deux concepts, ils pourraient être décrits et liés dans la théorie par la relation :

$$\text{masse}^2(\Phi) = \text{impulsion}^2(\Phi), \text{ pour tout } \Phi \in \check{S}$$

(l'équation de Klein-Gordon). Ici, la $\text{masse}^2(\Phi) = \text{masse}(\Phi)\ \text{masse}(\Phi)$ pour tous les états $\Phi \in \check{S}$, etc, sont des relations nouvelles. Une expérience est l'évaluation d'une ou plusieurs questions sur un état. Par exemple, la détermination que la masse $(\Phi) = 5$ est une expérience.

Notons que, naïvement, on n'imaginerait pas que Š possède aussi une structure, car le « monde réel » ne serait qu'un point Φ dans Š. Dans la pratique, on se réfère aux seuls aspects du « monde réel » en cours d'expérimentation dans un laboratoire. Il est de la responsabilité des physiciens théoriciens de préciser S, c'est-à-dire quelles cartes sont dans la liste et quelles relations s'appliquent. Il est de la responsabilité des physiciens expérimentateurs de décider, en consultation avec les théoriciens, exactement ce que sont les points dans Š et de les organiser pour qu'ils se manifestent dans un laboratoire.

Enfin, la tâche conjointe des théoriciens et expérimentateurs est de s'arranger pour que S soit « la plus petite » liste telle que la connaissance des nombres $a(\Phi)$ pour tout $a \in S$ détermine complètement Φ. La contrainte « la plus petite » se réfère ici au principe du rasoir d'Occam. Il ne doit pas y avoir de concepts redondants, mais suffisamment pour déterminer l'état des « choses », autrement dit que le modèle théorique soit suffisamment complet pour encoder par la valeur de tous ses concepts, les informations objectivement contenues dans un état donné et présent des choses. C'est la *propriété de re-constructibilité.*

Nous pouvons maintenant suivre le type de raisonnement esquissé dans la section précédente. Que signifie re-constructibilité? Comme les données d'entrée constituent une famille de nombres, un pour chaque $a \in S$, c'est la possibilité de construire une carte Φ: S ---> K.

À partir de cette famille nous avons besoin de pouvoir déterminer de façon unique un état $\Phi \in \check{S}$ tel que

$$\Phi(a) = a\,(\Phi), \text{ pour tout } a \in S.$$

Cette carte Φ n'est pas n'importe quelle carte, mais une carte compatible avec les relations théoriques. Ainsi, une carte qui inclurait les relations Φ(masse) = 2, Φ(mass²) = 5 ne serait pas conforme à l'exigence de correspondre à un état. Nous désignons par $\tilde{S}$ ces cartes $S \rightarrow K$ qui respectent les relations théoriques dans S. La propriété de re-constructibilité est, par conséquent,

$$\tilde{S} \leftrightarrow \check{S} \qquad (2)$$

une correspondance biunivoque. La correspondance affirme que l'on peut voir de façon équivalente les états physiques des « choses » comme des cartes de S vers K,

$$S = \{\text{concepts}\},\ S\text{—état---->}K \qquad (3)$$

ce qui est le point de vue adopté dans la théorie quantique, voir par exemple la référence 13.

Selon la re-constructabilité, ces deux possibilités sont deux voies équivalentes de réflexion sur les états. Par souci de concision, lorsque nous parlons d'une théorie S, nous entendons, concepts théoriques S et états $\tilde{S}$ ou Š.

Maintenant, quelle que soit la structure de S, $\tilde{S}$ hérite nécessairement de manière analytique ou tautologique d'une structure (pas nécessairement dans la même catégorie que celle de S, même si cela a été le cas si S est un groupe abélien comme à la section 2). De même, $\tilde{S}$ hérite d'une structure. De plus, de nouveau tautologiquement, la carte $S \rightarrow \tilde{S}$ donnée par la carte de *a* vers $A(\Phi) = \Phi(a)$ est nécessairement une inclusion $S \subseteq \tilde{S}$ qui respecte les deux structures algébriques. Avec les restrictions techniques appropriées, ce sera un isomorphisme.

Ce sont des caractéristiques essentiellement tautologiques qui s'appliquent en toute généralité (la partie remarquable du théorème de Pontryagin n'était pas cela, mais que $\tilde{S}$ était aussi un groupe abélien lorsque S l'était).

Ces remarques et la correspondance ci-dessus entre $\tilde{S}$ et Š dotent Š d'une structure algébrique telle que $\widetilde{(\check{S})} \cong S$. Par conséquent, si nous pensons à Š et S conjointement, c'est-à-dire à l'ensemble des couples de la forme (a, Φ) où $a \in S$ et $\Phi \in \check{S}$, nous aurons un objet auto-dual, SxŠ. Ceci résulte de $\widetilde{(S x \check{S})} \cong \tilde{S} x \widetilde{(\check{S})} \cong \check{S} x S \cong S x \check{S}$. Les égalités sont ici les isomorphismes évidents qui respectent les structures algébriques.

S x Š est la liste des concepts d'une théorie ce qui est équivalent à la théorie originale avec les concepts S. Les états des choses de la nouvelle théorie sont Š x S, et K est remplacé par K x K, que nous identifions dans K , puisque K comprend déjà des paires ou des matrices de nombres. En d'autres termes, une théorie non-auto-duale peut être considérée de façon équivalente comme auto-duale en considérant les états physiques possibles des choses en tant que concepts, disons concepts expérimentaux, et en les incluant parmi nos concepts théoriques. Ainsi, sans perte de généralité, il suffit de considérer les modèles de la forme

$$S = \{\text{concepts}\},\ S \xrightarrow{\text{concept}} K. \qquad (4)$$

Cela suffit à prouver que la structure auto-duale d'une théorie de la physique est une nécessité mathématique. Puisque nous voulons aussi faire des comparaisons historiques, dans les sections suivantes, nous allons prochainement soutenir que les physiciens, eux-mêmes, ont explicitement convergé vers une théorie auto-duale. Avant d'y venir, nous faisons une pause pour comparer le modèle ci-dessus avec la théorie correspondante Kant sur le jugement.

3.2 Théorie du jugement de Kant

Ici, nous rappelons la théorie de Kant du jugement, (cf. référence. 10, chapitre 4), mais sous une forme appropriée afin de la comparer avec ce qui précède. Cette formulation ne vise pas à rendre justice à toutes les subtilités de la théorie de Kant, mais d'en formuler la structure pertinente pour notre article. Soit O la liste de toutes les « choses en soi », les « objets ». Une intuition (dans le sens du processus de l'intuition) est une carte de O vers un espace I des « images », des intuitions (dans le sens du résultats des intuitions). Kant appelle ces cartes ou leurs images « représentations immédiates ». Soit S la liste de tous les « concepts ». Un concept est défini (récursivement) comme une carte de I ou de S vers l'ensemble des deux éléments {0, 1}, une « représentation générale ». Nous avons

$$S = \{\text{concepts}\},\ O \xrightarrow{\text{intuition}} I \cup S \xrightarrow{\text{concept}} \{0, 1\}. \qquad (5)$$

Un jugement est l'évaluation d'un concept sur un élément de S (c.a.d sur un autre concept) pour obtenir 1. Ainsi le jugement « tous les corps sont divisibles » est exprimé par nous comme « divisibilité (corps) = 1 ». Maintenant, S est une structure algébrique définie par la logique. Ainsi, les concepts « tasse », « soucoupe » et « tasse et soucoupe » sont reliés par « et ». Les relations se traduisent par des concepts qui agissent sur eux. Ainsi, la « divisibilité (tasse et soucoupe) = divisibilité (tasse) divisibilité (soucoupe) ». Ainsi les concepts (comme les cartes) « représentent » la structure de S. Il serait donc préférable de désigner la liste de ces « concepts comme des cartes » comme $\tilde{\tilde{S}}$. L'amalgame fondamental de la théorie kantienne du jugement est alors l'amalgame de $\tilde{\tilde{S}}$ avec S par identification délibérée.

Nous voyons ici que la théorie kantienne du jugement est, grosso modo, de type auto-dual. Le rôle de K est joué par l'ensemble {0, 1} c.a.d {faux, vrai}. Une différence est la notion d'intuition, absente dans le modèle des théories physiques ci-dessus. Les intuitions sont nécessaires à Kant pour servir de base à la détermination des concepts, car pour avoir une « valeur objective » cette détermination doit briser le cercle de l'auto-référencement. Cela ne semble pas être nécessaire dans notre modèle du jugement physique.

C'est parce que dans la physique, il semble que la détermination des concepts peut être fondée uniquement sur la cohérence: les expériences ne pouvant jamais prouver de façon absolue quoi que ce soit, seule la cohérence, entre les parties de la théorie des états qui produisent un état et entre les parties, de la théorie des concepts, correspondant aux concepts testés, peut être vérifiée. Cela pose un problème. Alors que pour Kant, la liste S peut être validée objectivement, dans un système complètement circulaire il semblerait y avoir beaucoup de théories satisfaisantes S, toutes cohérentes. Nous abordons ceci dans la section 4 et nous indiquerons comment le résoudre dans la section 6.

3.3 Argument dynamique

Dans cette section, nous cherchons à montrer que si les physiciens s'étaient initialement accordés sur une théorie non-auto-duale, alors ils vont être incités à migrer vers une théorie auto-duale conformément au développement exposé précédemment, comme une conséquence de l'interaction entre les théoriciens et expérimentateurs. Ce besoin s'impose si le principe de l'auto-dualité se révèle être un guide historique de base et aussi une simple prédiction mathématique de la structure.

En gros, nous modélisons l'interaction comme suit. Supposons que les théoriciens et les expérimentateurs aient poursuivi leurs tâches comme indiqué ci-dessus, mais se réunissent, une fois par an, lors d'une conférence spéciale à Vienne. L'objectif de ces entretiens est d'examiner et de s'accorder sur les structures S et $\breve{S}$ de la théorie générale de la physique.

Depuis la dernière conférence, les expérimentateurs ont, par leur travail réussi à créer les éléments de $\breve{S}$ et à explorer leurs relations mutuelles. Ce faisant, ils travaillent avec les éléments de $\breve{S}$ en tant que « concepts expérimentaux ». Par exemple, ils viennent juste de créer un état exotique « la position à variation sinusoïdale ». Cela signifie aussi qu'ils ont, de fait, créé le concept de « état de la position à variation sinusoïdale ». Le concept a la valeur 1 sur Φ si Φ est un tel état et a ailleurs la valeur 0. C'est le « concept expérimental » associé, mais il n'est pas encore un élément de S (un concept théorique): c'est aux théoriciens de déterminer les relations entre ce possible nouveau concept et les concepts théoriques existants. Ils vont essayer de montrer que le nouveau concept peut être totalement compris ou « expliqué » par ces relations en termes de concepts existants, et si c'est le cas il n'est pas un nouveau concept de S.

Ainsi, lors des discussions qui suivent, les expérimentateurs vont présenter ces nouveaux états exotiques comme étant peut-être de nouveaux concepts intéressants à expliquer par les théoriciens.

Si $\breve{S} \cong S$ alors un théoricien sera en mesure d'indiquer le concept existant de S correspondant à un concept réputé nouveau dans $\breve{S}$. L'issue du dialogue est alors $S^{nouveau} = S$. Si, *a contrario*, tous les concepts expérimentaux nouveaux $\breve{S}$ sont n'ont pas d'explication évidente, alors les théoriciens devront en conclure que $S^{nouveau} = S \times \breve{S}$. En général, $S^{nouveau}$ se situe entre ces deux extrêmes.

Un phénomène semblable se passe pour les états de la théorie. Les théoriciens ont étudié les éléments de S et en ont exploré les relations. En faisant cela, ils pensent leurs concepts théoriques comme étant des « états des choses », par exemple, « il est vrai que les équations de Klein-Gordon s'appliquent ». Plus précisément, ils s'imaginent qu'il y a un état tel que la valeur de ($masse^2$ - $impulsion^2$) vaut, dans ce cas, zéro. Ce n'est pas encore un élément de Š (un état expérimental): c'est aux expérimentateurs de déterminer si cet état proposé peut être obtenu dans leurs laboratoires, c.a.d de le construire explicitement comme une représentation de S (un élément de $\breve{S}$ ou, de manière équivalente, un élément de Š). Bien sûr, on s'attend à ce qu'un tel état peut-être nouveau, soit une combinaison d'états existants dans S. Lors des discussions les théoriciens vont présenter ces concepts comme étant éventuellement de nouveaux états. Si $S \cong \hat{S}$, il sera facile d'identifier les états correspondants connus et le résultat sera que $\tilde{\tilde{S}}^{\text{nouveau}} = \tilde{\tilde{S}}$. Dans le cas opposé, on aura $\tilde{\tilde{S}}^{\text{nouveau}} = \tilde{\tilde{S}}\text{x}S$.

En général, $\tilde{\tilde{S}}^{\text{nouveau}}$ se situera entre les deux. Ce qui devra être martelé lors de la conférence est qu'il faut s'assurer que $\tilde{\tilde{S}}^{\text{nouveau}} = \tilde{\tilde{\ }}(S^{\text{nouveau}})$, autrement dit de vérifier que les nouveaux concepts permettent de reconstituer l'ensemble des états, et les nouveaux états respectent les relations dans l'ensemble complet des concepts.

De toute évidence, ces deux phénomènes de transfert vont de pair. Un concept peut être vérifié expérimentalement et ainsi aboutir à l'acceptation d'un nouvel élément de $\tilde{\tilde{S}}$, ce qui conduit alors peut-être à d'autres nouveaux concepts. On pourrait penser que, en fait, aucun élément nouveau ne pourrait être créé de cette façon, par exemple, qu'un concept nouveau, peut-être découlant d'un élément de $\tilde{\tilde{S}}$, peut toujours se ramener à une combinaison de concepts déjà existants dans S. Ce qui revendiquerait que toutes les expériences sont des jugements analytiques. Même si cela était vrai, il échoue dans la pratique, parce que les structures S et $\tilde{\tilde{S}}$ sont les structures de toute la théorie tandis que la plupart des physiciens, en tant que spécialistes, ne sont concernés que par leur partie de la théorie.

Il est facile pour un concept d'apparaître nouveau en oubliant les relations qui, en fait, le rendent équivalent à ceux qui existent déjà. Une fois que le nouveau concept est accepté et intégré par les théoriciens dans S^{nouveau} et que ses représentations $\tilde{\ }(S^{\text{nouveau}})$ ont été construites, il est illogique de revenir en arrière et de corriger une telle erreur. C'est parce que à ce stade, les relations dans l'ancien S ne correspondent plus exactement à certains des nouveaux états. On pourrait encore revenir à S et $\tilde{\tilde{S}}$, en renonçant à la fois aux concepts nouveaux et aux nouveaux états, mais ce serait considéré comme une sorte de choix arbitraire (comme la limite newtonienne) plutôt qu'une raison pour ne pas accepter la nouvelle théorie.

Des exemples réalistes de ce phénomène de transfert (contrairement aux exemples figuratifs ci-dessus) sont nécessairement techniques. Par exemple, considérons le concept d'impulsion. Dans la théorie newtonienne la position est le concept principal. On la note **x**. Le concept d'impulsion, que nous noterons **p**, fait intervenir la dérivée de **x** (il n'est pas vraiment indépendant de x): **p** = masse.**x'**.

Maintenant, en travaillant dans la mécanique newtonienne, les expérimentateurs construisent des ondes Φ_p d'impulsion $p \in K$ donnée, qui est telle que $\mathbf{p}(\Phi_p) = p$. Ce sont des états newtoniens, mais exotiques, car composés de plusieurs particules. Ce sont des états expérimentaux motivés par des concepts théoriques (mathématiquement les états d'ondes Φ_p sont des représentations de la structure additive de l'espace newtonien exprimée de manière équivalente dans des structures additionnelles sur l'algèbre S des fonctions des coordonnées de position x, x^2, x^3, etc. sur l'espace newtonien).

Aujourd'hui, alors que la mécanique des milieux continus se développe dans son propre contexte, il est facile de perdre de vue ses origines analytiques dans les lois de Newton. En particulier, l'utilité de la notion de quantité de mouvement **p** (avéré utile, car il est conservé) nous incite à y penser comme indépendamment défini comme un concept **p** tels que $\mathbf{p}(\Phi_p) = p$. Cette situation encourage donc les théoriciens à élaborer une nouvelle théorie S^{nouveau} pour y inclure à la fois **x** et **p** comme des concepts indépendants, ou du moins un lien plus faible que dans les relations de la théorie newtonienne. L'impulsion **p** est maintenant un nouveau concept théorique inspiré par des expériences avec des ondes. Les nouveaux **x** et **p** coïncident avec les anciens concepts lorsqu'ils s'appliquent sur les ondes classiques, mais les théoriciens anticipent désormais d'éventuels états exotiques non-newtoniens (dans ce cas, quantiques) sur lequel les anciennes relations ne s'appliquent pas.

Lorsque de telles représentations exotiques de $S^{nouveau}$ ont été construites, la nouvelle théorie est jugée nécessaire (pour faire face à ces nouveaux états).

En revenant maintenant à notre modèle de démonstration, si les discussions montrent que $S^{nouveau}$ n'est pas auto-dual, alors il faudra le changer à la prochaine réunion. Les théoriciens ne l'accepteront que quand la théorie deviendra auto-duale. Ceci conclut l'argument de nécessité.

Il convient de mentionner que ce n'est cependant pas le seul critère. Si la théorie est de la forme S x $\tilde{S}$, un autre principe incitera les théoriciens de modifier la théorie. C'est le principe d'unité. En effet, une théorie composée de deux parties indépendantes ne satisfera pas la plupart des théoriciens. De même, une liste d'états de la forme S x $\tilde{S}$ ne satisfera pas la plupart des expérimentateurs, car elle correspond à une configuration comportant deux « univers » indépendants. Si l'envie d'unifier est acceptée (pour une raison quelconque), une configuration de la forme S x $\tilde{S}$ pour $S^{nouveau}$, même auto-duale, va continuer à évoluer.

Les théoriciens auront tendance à utiliser les relations entre S et $\tilde{S}$ pour former une nouvelle théorie $S^{nouveau}$ = S I><I $\tilde{S}$, par exemple. Les expérimentateurs vont considérer $\widetilde{(S\ \mathrm{I}{>}{<}\mathrm{I}\ \tilde{S})}$ et vont tenter de modifier S x $\tilde{S}$ pour se mettre en accord avec cela. Un modèle mathématique décrivant comment ces modifications structurelles pourraient être faites, la théorie des bi-produits croisés, est développé dans la référence 3, section 1.1 dans le cadre des idées de la référence 14, II.v3 et de la référence. 15, p. 54. En général, ces modifications vont détruire l'auto-dualité, et donc aux prochaines discussions, la théorie devra continuer d'évoluer et de croître.

Ce désir esthétique d'unifier intervient conjointement avec l'urgence d'éliminer les concepts redondants déjà évoqués. Ainsi, nous voyons que le principe de l'auto-dualité et le souci esthétique militent à éviter que S x $\tilde{S}$ forme un « moteur » à deux-temps qui propulserait l'évolution de la physique vers une théorie auto-duale indécomposable. Dans le premier temps S se transforme en S x $\tilde{S}$. Dans le deuxième temps il se réduit, et avec de possibles modifications, peut conduire à $S^{nouveau}$. A l'issue de ce type d'élaboration d'une théorie auto-duale le moteur « cale ». Un tel événement dans notre modèle signifie une période de stagnation, comme à la fin du siècle dernier, quand les physiciens pensaient que leur tâche était accomplie : une théorie complète auto-cohérente qu'il n'y avait aucun besoin particulier de changer. Ceci termine l'exposé utilisant notre modèle de démonstration décrivant l'origine du principe d'auto-dualité dans la méthodologie de la physique.

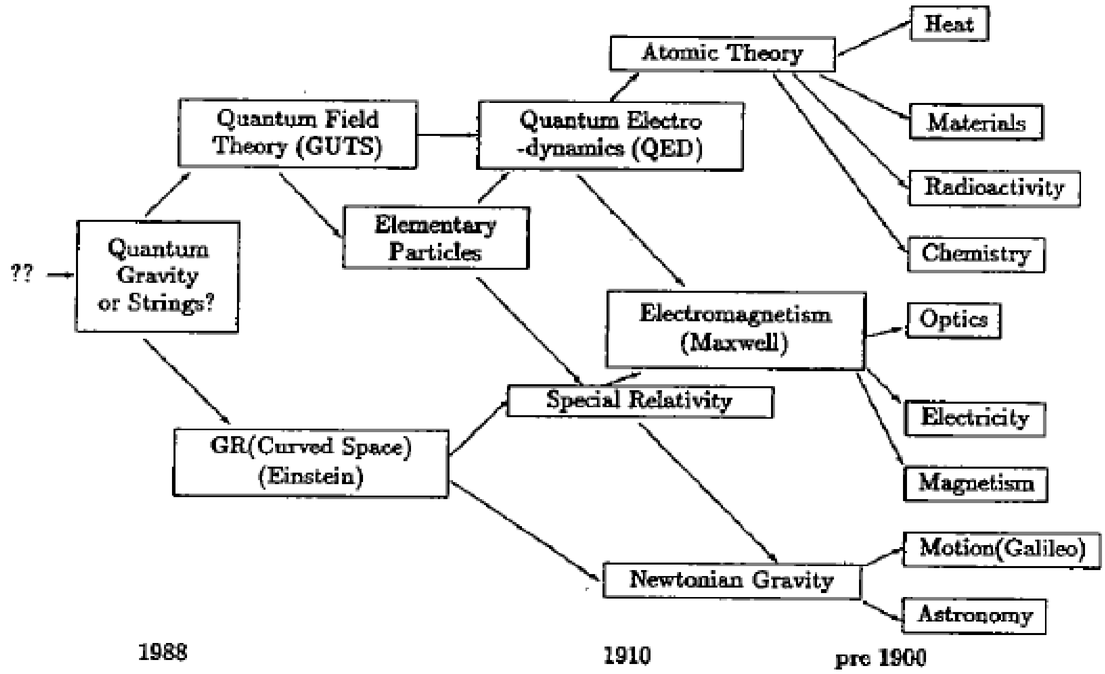

Figure 1 : *Décomposition de la physique théorique en éléments. Les flèches indiquent comment les lois de la physique, relatives à un élément, peuvent être déduites, en tant que limites, d'autres éléments plus abstraits. Avec l'autorisation de l'auteur.*

4. Le principe d'auto-dualité est suffisant.

Dans cette section, nous supposons que le principe d'auto-dualité s'applique conformément aux préceptes de la section précédente. Nous en examinons les implications générales pour la structure de la physique dans sa totalité. Rappelons que, dans l'introduction, nous avions indiqué que cela concerne non seulement une théorie S, mais ses sous-théories limites variées et leurs relations. Notre objectif est de montrer que le principe est mathématiquement et suffisamment assez puissant pour forcer le profil autorisé à être du type général aujourd'hui connu. Nous ne nous intéressons dans cette section qu'à la nature de cette contrainte : la correspondance pratique avec la physique est l'objet de la section suivante.

L'estimation de la structure observée de la totalité de la physique est représentée sur la Fig. 1. Les cadres indiquent les théories bien connues de la physique et les flèches pointent vers des théories qui ont des axiomes correspondants à une limite, cas particulier des axiomes de la théorie à la source de la flèche. Il n'est pas dans nos intentions de défendre cette estimation ici. Le schéma suivant résume simplement la situation globale qui se trouve, par exemple dans le texte de référence 16. Bien sûr, ce que les physiciens font réellement est plus subtil (et plus ad hoc) que tout principe aussi simple. Nous ne pouvons espérer un accord sur quoi que ce soit, sauf sur les aspects les plus généraux de la structure globale. Ce sont :

(1) Les théories sont imbriquées dans un arbre de théories successivement de plus en plus précises.

(2) La tendance est d'unifier les différentes théories. En effet, cette unification dans le siècle présent a si bien réussi que, comme il est bien connu, il ne reste plus que deux paradigmes, la mécanique quantique et la relativité générale. Si ceux-ci peuvent être combinés en une seule théorie satisfaisante (éventuellement, la théorie des cordes) de sorte qu'ils apparaissent correctement comme des limites, alors ce sera la fin la physique telle que nous la connaissons. Comme indiqué dans la référence 17, la fin de la physique est en vue.

Ces deux caractéristiques essentielles sont impliquées par le principe de l'auto-dualité (dans le modèle de la section. 3) comme suit.

(1) L'évolution de la forme $S^{nouveau} \subseteq S \times \widetilde{S}$ (ou une modification $S^{nouveau} \subseteq S \bowtie \widetilde{S}$) nous sont imposés par le désir d'auto-dualité. Par conséquent, les théories continuent à améliorer, chaque nouvelle théorie contenant l'ancienne théorie S et d'autres aspects $\widetilde{S}$, produisant une structure arborescente. Notons que dans $S^{nouveau}$, $\widetilde{S}$ apparaît comme une sous-théorie, quoiqu'elle tire son origine des concepts expérimentaux associés à la sous-théorie S. En dehors de ces unifications des duals, il peut y avoir aussi des unifications ad hoc de structure similaire entre les sous-théories S^1, S^2 pour donner, disons, $S^1 \bowtie S^2$. Celles-ci ne sont pas impliquées par le principe d'auto-dualité, mais pourraient se produire de toute façon et s'ajouter à l'arborescence.

(2) Ces unifications qui émergent du principe d'auto-dualité impliquent un changement radical dans le langage beaucoup trop général ou dans les structures abstraites. C'est parce que S et $\widetilde{S}$ sont (si S n'est pas auto-dual) des catégories très différentes ; toute catégorie, dans laquelle $S \times \widetilde{S}$ (ou une déformation $S \bowtie \hat{S}$) se situe, est un peu plus générale que celle de S ou celle de $\hat{S}$. Par conséquent, chaque avancée de ce type implique une généralisation radicale de la catégorie, c.a.d des unifications correspondant à des « sauts quantiques ». Ce mécanisme pourrait faire contraste avec, par exemple, la référence 18. Enfin, à cause de cela, après quelques étapes, les catégories sont tellement générales que l'évolution s'arrête parce que nous devenons incapables de concevoir des structures plus générales.

Le point important à propos de l'argument ci-dessus est qu'il soutient qu'il résulte seulement du principe de l'auto-dualité. La meilleure façon de le voir est de ne pas tenir compte des considérations physiques et de s'intéresser simplement aux conséquences mathématiques du principe de l'auto-dualité. Ainsi, pour essayer de prouver le résultat mathématiquement, posons que la propriété d'auto-dualité définit la catégorie P.

À quoi P peut-il ressembler ? Nous avons un problème mathématique relativement précis à résoudre. Il s'avère être à la fois très restrictif - la plupart des structures ne sont pas auto-duales - et pourtant il admet une variété très riche de solutions.

La structure de P est estimée sur la Fig. 2.

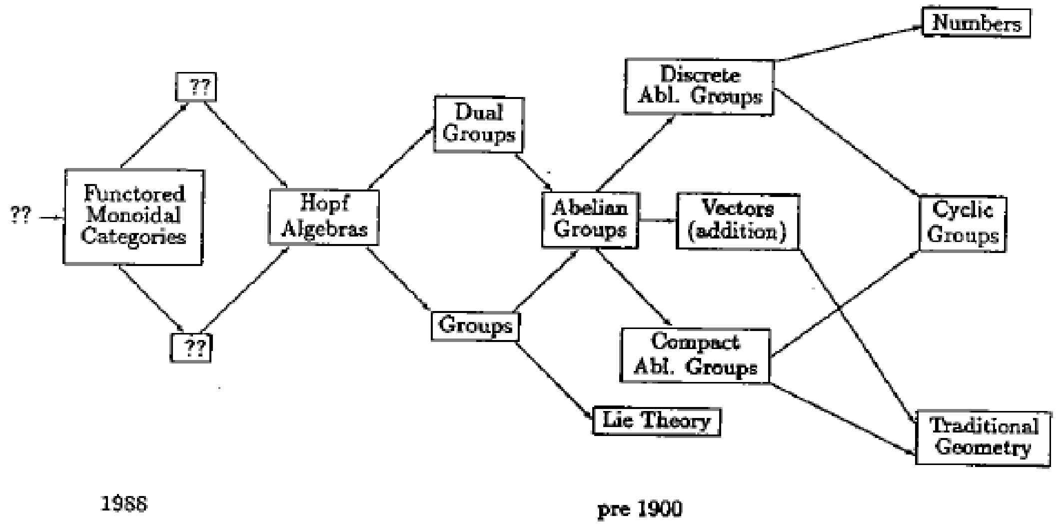

Figure 2 *: Structures mathématiques auto-duales connues. Les catégories auto-duales sont sur l'axe central. Hors de l'axe on trouve les déformations non duales d'une catégorie auto-duale unifiée par une catégorie auto-duale plus générale. Plus loin on trouve des extensions pertinentes. Les flèches indiquent comment les axiomes d'une catégorie sont vues comme des restrictions de catégories plus générales.*

Les structures auto-duales connues sont représentées le long de l'axe central. Une flèche indique que la catégorie à sa source apparaît comme une généralisation de la catégorie à sa pointe. La façon dont ces structures s'organisent est donnée par le schéma ci-dessus: on déforme les structures S d'une catégorie auto-duale pour en déduire la définition d'une catégorie non auto-duale. Ceci est ensuite unifié au sein d'une catégorie plus générale, suffisamment générale pour inclure à la fois la catégorie déformée et son dual. En outre, ces catégories plus générales suggèrent des ramifications variées, dont nous avons représenté quelques exemples pertinents. Comme des mathématiciens travaillent de façon très abstraite, mais sans exemples (c.a.d avant qu'ils existent), l'ordonnancement chronologique qui se manifeste par l'orientation liée aux flèches dans le diagramme ne correspond pas nécessairement exactement l'ordre historique des définitions. Le schéma est plutôt d'ordre structurel décrivant les relations logiques entre les axiomes.

Le diagramme exprime les conséquences mathématiques du principe d'auto-dualité, tel qu'il est compris dans les mathématiques par lesquelles nous le connaissons. Il est à comparer en termes généraux avec la figure 1. La structure arborescente est clairement exposée, comme aussi l'argument que les catégories deviennent rapidement très générales: la catégorie la plus à gauche est la catégorie des (petites) catégories des monoïdes fonctoriels. Nous concluons que, pour autant qu'on le sache, la totalité des structures autorisées par le principe d'auto-dualité est d'une nature semblable à la structure apparente de la totalité de la physique. Il peut y avoir encore d'autres structures auto-duales qu'on ne connaît pas encore: si les mathématiciens trouvent une chaîne de telles structures auto-duales très différentes de celles de la figure 2, le principe de l'auto-dualité permettra d'affirmer que cela correspond à un développement de la physique. Ce serait nécessairement très différent de la physique que nous connaissons (car ce devrait être fondé sur des structures très différentes de celles qui sont familières en physique).

Notons que dans chaque catégorie auto-duale il peut y avoir de nombreux objets. Certains d'entre eux seront auto-duaux ou de type auto-dual. Selon le principe de l'auto-dualité, ce sont eux qui doivent plus particulièrement correspondre aux théories auto-contenues (c.à.d complètes) de la physique. Ceux-ci devraient être stagnants, n'ayant pas de raison particulière d'évoluer selon notre modèle. Pour des raisons esthétiques, elles pourraient évoluer lentement, d'une certaine manière, vers des déformations non auto-duales qui seraient alors unifiées dans une autre théorie auto-duale.

5. Détail des preuves historiques

Dans cette section, nous montrons qu'il existe une séquence historique de théories de plus en plus complexes de la physique, successivement construites sur des structures auto-duales de plus en plus complexes.

5.1. Les structures les plus simples

La catégorie auto-duale la plus simple connue est celle des groupes abéliens comme nous l'avons montré dans la section. 2. Quelles sont toutes les structures auto-duale S dans cette catégorie? La réponse est tout simplement ce qui suit :

(1) les « groupes horaires (circulaires) »,

(2) l'addition des vecteurs et

(3) les paires constituant un groupe abélien S et son dual $\widetilde{S}$ indépendamment (référence. 12, section 12.1).

Selon le principe de l'auto-dualité, ceux-ci doivent correspondre aux théories complètes les plus simples de la physique ou des paradigmes. Certainement que, (1) les groupes horaires sont parmi les premières structures identifiées dans la philosophie naturelle, et, certainement, (2) qu'on peut soutenir que la structure principale de la physique au siècle dernier a été celle des espaces vectoriels. Le cas particulier $\mathbf{R} \times \widetilde{\mathbf{R}}$ était particulièrement important et correspond à la (position, et au mouvement) d'une particule libre selon une dimension unique dans la mécanique. La soi-disant « ancienne théorie quantique » de Planck et Bohr était l'innovation suivante qui comprenait la quantification, c.à.d la discrétisation de l'impulsion. Un exemple est une particule dans un cristal. Pour une telle particule, la position dans l'espace est donnée par le groupe circulaire S^1. Son dual est l'ensemble des nombres entiers, $\widetilde{S^1} = \mathbf{Z}$ et la physique (position, mouvement) est un élément de $S^1 \times \mathbf{Z}$, qui est l'exemple le plus simple de type (3).

Qu'il s'agisse ou non d'une image fidèle des structures centrales des premières théories complètes de la physique est matière à débat. Le mot « complète » signifiant ici « théoriquement auto-contenue » est essentiel, car le procédé de l'exemple (3) montre que n'importe quelle structure peut faire partie d'une théorie complète, pour autant que sa structure duale soit également incluse. En vérité, la physique avant 1900 était en pratique dans une large mesure descriptive, c.à.d, en expliquait les données sans mettre l'accent sur des considérations de structure mathématique. Par conséquent, il faut s'intéresser à la physique de ce siècle pour voir le principe de l'auto-dualité plus définitivement mis en œuvre. C'est l'objet de ce qui suit.

5.2 Structures auto-duales les plus simples suivantes - Algèbres de Hopf en tant que structures de la mécanique quantique et de la gravitation.

Le catégorie auto-duale suivante la plus simple connue est celle des algèbres de Hopf. Pour plus de détails, voir référence 19 et référence 20, section 1, par exemple. Selon notre principe d'auto-dualité, les structures auto-duales dans cette catégorie doivent être les structures centrales de la prochaine des théories plus complexes complètes de la physique, qui succédera à l'ancienne « théorie quantique ». La prochaine physique la plus complexe que nous puissions espérer comprendre de cette façon est une théorie moderne de la physique quantique et de la gravitation. Une forme simple de la théorie quantique moderne est la mécanique quantique (statistique) moderne. Nous aurons besoin de la formulation abstraite algébrique de la référence 13, chapitre. 2, ce qui équivaut à l'habituelle action d'opérateurs sur un espace de Hilbert, une fois que l'état de vide a été choisi.

En effet, les structures algébriques abstraites sont bien connues en tant que fondement de la mécanique quantique. Les observables sont les éléments (auto-adjoint) d'une algèbre S. Une algèbre de Hopf est une algèbre S avec une autre structure Δ appelée le coproduit. Ce coproduit génère une structure de co-algèbre S en plus de sa structure d'algèbre existante, et une algèbre de Hopf requiert qu'elles soient compatibles d'une manière naturelle.

En effet, il apparaît que cette structure supplémentaire Δ encode la géométrie de l'espace-temps et les équations de compatibilité se révèlent être quelque peu comparables à l'équation d'Einstein pour le champ gravitationnel. En général, cette information géométrique est exprimée en termes de hamiltonien et d'équation de Schrödinger, mais il a été démontré par l'auteur, du moins dans certains modèles de démonstration simples, que ceux-ci représentent la structure de Δ. Même si elle n'est pas bien connue des physiciens, cette structure Δ appartient à une tradition bien établie en mathématiques connues sous le nom de géométrie algébrique, datant peut-être des travaux de Grothendiek, Zariski, et un théorème de Gelf et Naimark.

Dans le modèle de démonstration le plus simple analysé dans la référence. 6, S est l'algèbre de la mécanique quantique d'une particule dans une espace unidimensionnel plat. Cette algèbre bien connue « l'algèbre des relations de commutation canoniques », est générée par les relations bien connues de commutation canoniques $\mathbf{[p, x] = i\hbar}$. On peut montrer que cette algèbre n'admet pas de coproduit Δ compatible de structure similaire mais duale. Cela signifie que pour que S soit une algèbre de Hopf de type auto-dual comme le principe d'auto-dualité le suggère la mécanique quantique ordinaire en espace plat doit être modifiée. En modifiant les relations de commutation canoniques, le mouvement d'une particule se déplaçant librement est également modifié ce qui pourrait représenter l'action de la gravitation et ceci comme une pure conséquence de l'exigence d'auto-dualité.

En résumé, une description de la matière par la mécanique quantique ordinaire en espace plat ne pourra jamais satisfaire le principe d'auto-dualité. Des forces de type gravitationnel sont inévitablement requises pour équilibrer la structure quantique et maintenir ainsi l'auto-dualité.

Cette approche par l'algèbre de Hopf de la mécanique quantique combinée avec la gravitation fournit des modèles de démonstration simples dans lesquels la mécanique quantique et la gravitation sont unifiés dans une seule structure mathématique. Nous savons que nos notions géométriques habituelles les plus intuitives de l'espace-temps se décomposent à une échelle microscopique où les effets quantiques sont dominants, ce qui conduit à des conjectures variées sur une« structure de type mousse d'espace-temps » à une échelle aussi petite. Donc, un langage plus abstrait est véritablement requis par des physiciens théoriciens.

Dans cette approche, utilisant l'algèbre de Hopf, intégrant la mécanique quantique et la gravitation, les propriétés de dualité des algèbres de Hopf prennent une interprétation physique que l'on peut raisonnablement supposer exister dans des modèles plus réalistes. Donc, comme nous l'avons fait pour les groupes abéliens dans la section 2, nous allons démontrer maintenant en détail ce que le principe d'auto-dualité apporte dans ce contexte. Pour ce faire, nous avons besoin de décrire la dualité de manière plus détaillée.

S désigne l'algèbre de la mécanique quantique, « l'algèbre d'observables ». Le vecteur d'état normalisé $|\Phi>$, détermine une carte Φ de S vers les nombres ordinaires. Il assigne à toute observable a dans S, sa valeur moyenne escomptée $\Phi(a)$ $<\Phi|a|\Phi>$. Étant donné que seules ces valeurs moyennes sont, en fait, tout ce que nous pouvons réellement mesurer en mécanique quantique, c'est la carte elle-même qui est l'état. La totalité des cartes linéaires Φ de S vers les nombres ordinaires est appelé « états ». Le Φ ci-dessus est un « état simple », mais des états plus généraux sont des « états mixtes » de la forme

$$\Phi(a) = <\Phi_1|a|\Phi_1>t_1 +<\Phi_2|a|\Phi_2>t_2 + \ldots.+<\Phi_n|a|\Phi_n>t_n$$

pour $n \geq 1$ et $t_1,\ldots., t_n$ positifs et de somme égale à 1. Ces états représentent l'algèbre S en termes de nombres ordinaires, les valeurs escomptées. En fait, étant donné un état abstrait (Φ) on peut reconstruire une algèbre complète des opérateurs sur un espace de Hilbert, représentant S telle que Φ est l'état du vide. Ceci s'appelle la construction de Gelf, Naimark, Segal (GNS) (référence 13, chapitre 3). Ainsi, mathématiquement, si S est l'algèbre des observables du système quantique, alors $\breve{S}$ est l'ensemble des états.

Comme S est une algèbre, $\breve{S}$ est automatiquement une co-algèbre. Cela signifie qu'elle dispose d'une carte Δ qui « co-multiplie », les éléments de $\breve{S}$. Si Φ est un élément de $\breve{S}$, alors ΔΦ est une chaîne de paires d'éléments de $\breve{S}$. Plus précisément, il s'agit d'un élément du produit tensoriel S⊗S, qu'en pratique on écrit $\Delta\Phi = \sum\Phi_{(1)}\otimes\Phi_{(2)}$. Explicitement, le co-produit de Φ est défini par

$$\sum\Phi_{(1)}(a)\Phi_{(2)}(b)= \Phi(ab)$$

Notre principe d'auto-dualité dit que dans une théorie complète de la physique, la structure de $\breve{S}$ doit être la même que celle de S (à un dictionnaire près). Donc, pour que cela soit possible, S doit posséder lui-même une structure de co-algèbre qui de plus doit être compatible avec la structure d'algèbre existant. C'est pour cela que S doit être une algèbre de Hopf.

De la même façon, cette structure de co-algèbre que notre principe exige sur S définit désormais automatiquement une structure d'algèbre sur $\breve{S}$. Explicitement, le produit de Φ,Ψ est défini par

$$(\Phi\Psi)(a) = \sum\Phi(a_{(1)})\Psi(a_{(2)})$$

où $\Delta a = \sum(a_{(1)})\otimes (a_{(2)})$. Donc $\breve{S}$ est aussi une algèbre de Hopf comme nous le voulions, appelée l'algèbre de Hopf duale de S.[5]

Maintenant, supposons que la structure de co-algèbre sur S corresponde à de la géométrie. Alors, si un iconoclaste affirme que Φ dans $\tilde{\tilde{S}}$ doit être considéré comme l'observable et donc que *a* dans $S \cong \tilde{\tilde{S}}$ doit être considérée comme un état, ce qu'il appelle la structure d'algèbre de sa mécanique quantique correspond à ce que nous appelons la structure de co-algèbre de notre géométrie, et vice versa. En outre, si S est auto-dual, $S \cong \tilde{\tilde{S}}$, alors nous et l'iconoclaste ne faisons simplement qu'utiliser des mots très différents pour décrire la structure mathématique équivalente de l'algèbre et de la co-algèbre.

Ainsi, dans la figure. 3 le versant gauche où les effets quantiques sont dominants – où on trouve des particules élémentaires - serait pour notre iconoclaste le flanc droit où il dirait qu'à son avis, les effets gravitationnels sont dominants, et vice versa. Il est intéressant de noter que sur les deux versants, on trouve des objets de type particule ; sur le flanc droit, on trouve, selon la plupart des astronomes, des trous noirs, par exemple, l'objet appelé Cygnus X-1. Un certain nombre de théoriciens ont conjecturé qu'on pourrait transformer notre vision du monde en considérant les trous noirs[2] comme des particules élémentaires, il se trouve que c'est précisément ce que notre iconoclaste ferait.[7]

En résumé, la présence de la gravitation a été imposée par le principe d'auto-dualité de manière à maintenir la symétrie entre la physique quantique et la gravitation représentée par symétrie gauche-droite dans la figure 3. Dans le contexte actuel de ce principe, cela revient à l'obligation de maintenir une symétrie complète entre les observables et les états de la mécanique quantique. Il faut aussi noter que dans la figure 3, la limite supérieure affirme que l'univers est fermé, c.a.d a une taille finie. En conséquence, tous les objets physiques se trouvent dans le triangle illustré.

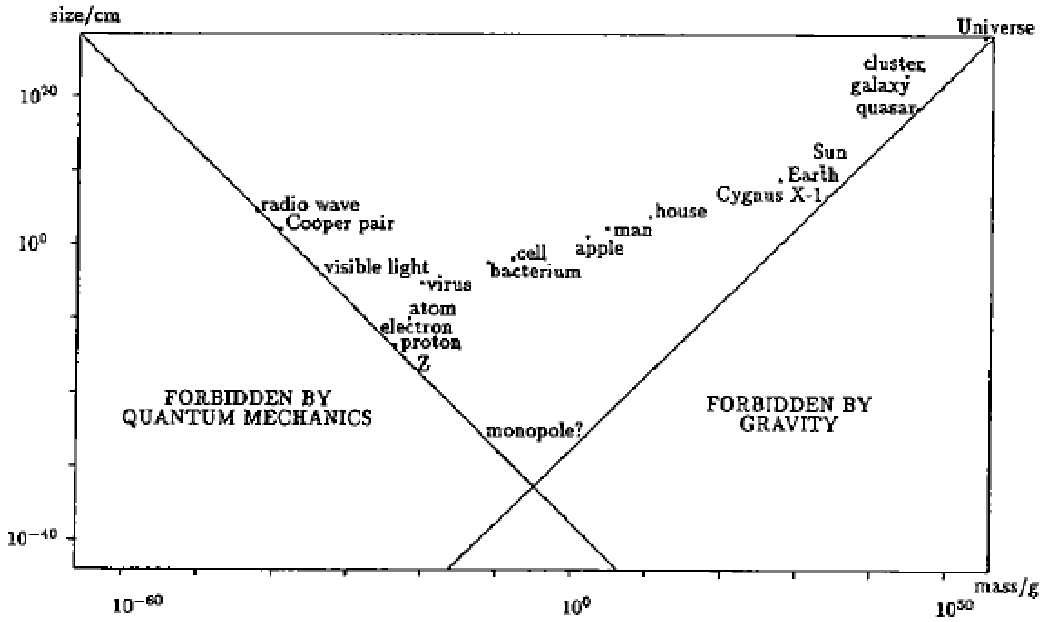

Figure 3 *: L'échelle des phénomènes physiques sur un diagramme donnant la taille des objets de l'univers en fonction de leur masse-énergie.*

2 Un trou noir est un objet indécomposable caractérisé par un maximum de 3 paramètres (masse, spin, charge).

5.3 Structures auto-duales plus générales - la structure de la théorie des cordes en tant que catégories monoïdales

La catégorie auto-duale plus complexe suivante actuellement connue est la catégorie des (petites) catégories monoïdales fonctorielles. Une catégorie monoïdale C est munie d'un « produit tensoriel » entre les objets. Des exemples classiques sont les catégories d'espaces vectoriels, de représentations des groupes et des représentations des algèbres de Hopf. Voir référence 20, section 7 pour plus d'information. Un foncteur entre les catégories monoïdales F : C $\rightarrow$ V est, grosso modo, une carte d'objets et de morphismes de C vers des objets et des morphismes dans V respectant les structures des catégories et $\otimes$. Par catégorie monoïdale fonctorielle, nous entendons un tel triplet S = (C, F,V).

Motivé précisément par le principe de la représentation de l'auto-dualité théorique décrit dans le présent document, nous avons défini dans la référence 8, la notion de représentation d'une catégorie monoïdale fonctorielle S et montré que la liste des représentations, $\widetilde{\mathrm{S}}$, forme de même une catégorie monoïdale fonctorielle $\widetilde{\mathrm{S}}$. Elle prend la forme $\widetilde{\mathrm{S}}$ = (C°, F°, V) (référence 8, théorème 3.3). Ainsi, la catégorie des (petites) catégories monoïdales fonctorielles est auto-duale [(8)] comme on l'a représenté sur la figure 2.

Toutes les catégories et les dualités dont nous avons parlé précédemment dans cette section sont contenues dans cette dualité très générale de catégories monoïdales fonctorielles dans le cas particulier V = Vec. (Ici, Vec est la catégorie des espaces vectoriels.)

Indépendamment de ces considérations sur les représentations de l'auto-dualité théorique, il a été récemment découvert que le problème de la construction rationnelle d'une théorie conforme des champs (une classe qui comprend la théorie des cordes) semble être équivalente au problème de la construction d'une catégorie monoïdale d'un certain type. C'est un travail récent de Moore et Seiberg. Voir référence 20, section 7.6 pour une introduction circonstanciée. Dans ces théories il y a une structure, l'algèbre chirale, qui joue le rôle d'un « groupe de symétries » maximal.

Nous avons récemment soutenu, en référence 7, qu'une telle algèbre chirale peut être considérée essentiellement comme un exemple d'un certain type de généralisation d'algèbre de Hopf. En outre, ces algèbres de Hopf généralisées correspondent à des exemples de catégories monoïdales fonctorielles de la forme (C, identité, C).

Ces algèbres de Hopf généralisées sont donc des candidats pour remplir le cadre vide en zone inférieure dans la figure 2 (et leurs algèbres duales pour remplir la zone correspondante du haut). Ceci est un exemple intéressant de mathématiques émergeant de la physique qui peut en retour fournir une formulation mathématique précise des algèbres chirales. Il s'agit d'un sujet de recherche actuel. D'autres physiques qui peuvent être concernées par ces arguments sont en référence 22 et ses généralisations.

Le principe prédit également que, parmi les théories rationnelles des champs conformes (qui sont pléthoriques), les physiciens devraient s'intéresser à celles de représentations théoriques auto-duales de la forme des catégories auto-duales monoïdales fonctorielles. Notons que si les physiciens ont considéré des dualités et auto-dualités variées pour contraindre les théories des champs conformes, jusqu'à présent, aucune n'était de type « de représentation théorique » inspirée par le principe.

La physique décrite par la théorie des cordes et quelques autres théories des champs conformes vise également à inclure la théorie quantique et la gravitation, mais plutôt sous une forme plus générale que les modèles simples régis par les algèbres de Hopf comme dans le paragraphe précédent. Plus précisément, ils devraient unifier la théorie quantique des champs, pas seulement la mécanique quantique, et une géométrie riemannienne plus générale allant bien au-delà des espaces courbes simples. Il est difficile de concevoir des catégories auto-duales radicalement plus générales que la catégorie des catégories monoïdales fonctorielles. Pour être radicalement plus général que ces catégories, il semble nécessaire de recourir à une notion radicalement plus générale que celle de la catégorie elle-même. Une telle notion serait difficile à formuler en mathématiques telles que nous les concevons (où les structures sont le plus souvent formulées implicitement en termes de théorie des catégories). Une telle éventualité correspond alors à la croyance, parmi les physiciens [17], que la fin de la physique telle que nous la pensons, est en vue.

6. Quelques remarques pour conclure

Dans cette section, nous concluons par une brève discussion sur le statut ontologique de la totalité de la physique impliquée par la thèse de l'article. Rappelons que, contrairement à Kant, nous n'avons pas utilisé dans la section 3 la notion de « choses en soi » *O*. Chez Kant celle-ci est nécessaire pour permettre, par l'intuition, de valider objectivement les concepts. Au lieu de cela, en physique, les concepts de S sont validés par des expériences par Š tandis que les éléments de Š sous la forme de $\widetilde{\check{S}}$ sont validés par S.

Ceci ferme la boucle. En outre, dans une théorie auto-duale Š et S, les concepts expérimentaux et théoriques, sont clairement identifiés. On pourrait penser, alors, que dans une telle situation de boucle rien ne serait possible. Nous avons fait valoir à la section 4 que ce n'est pas aussi définitif qu'on pourrait le penser en raison précisément de la contrainte d'auto-dualité complémentaire, à savoir que la cohérence du système auto-dual est une contrainte forte, qui lui impose une structure rigide pour les théories admises, et qui reflète l'ensemble de la physique.

D'où la position sur le réalisme, induit par l'argument suffisant, qui est loin d'être le conventionnalisme de, disons, celui cité dans la référence 23. Il y a plutôt une réalité physique bien définie, non découverte par les physiciens, sous la forme d'une structure sous-jacente définie, pour l'ensemble de la physique, mais nous avons soutenu que cette structure définie, est ni plus ni moins que l'implication mathématique du principe d'auto- dualité. Le principe d'auto-dualité est donc comme un « axiome de la physique », et est une condition a priori de la conception de la physique telle que nous la connaissons.

De ce point de vue, la « réalité de la physique » telle que connue par les expériences des physiciens résulte de cet axiome, de la même manière, par exemple, que la réalité de la topologie à peu de dimensions est créée par les axiomes d'une variété. Une fois que nous munissons d'axiomes une variété, toutes les structures riches de la topologie de dimension faible (les différents types de surfaces, nœuds, etc) suivent mathématiquement. La principale différence est que, dans l'étude topologique de faible dimension, les axiomes sont, au moins initialement, postulés explicitement.

En revanche, en physique les « axiomes » émanant du principe d'auto-dualité sont invoqués inconsciemment dans le cadre de la pensée physique. Les axiomes d'une variété et le cadre de la théorie/expérience issus du principe de l'auto-dualité sont tous deux des questions de choix. Leur acceptation, « crée » la réalité de leurs sujets respectifs. Cela ne signifie évidemment pas que, soit la topologie de faible dimension, soit la physique sont vides ou arbitraires. Dans chaque cas, il y a de nombreux travaux à réaliser pour étudier et répertorier les structures autorisées et de leurs relations.

De même, nous pouvons concevoir d'autres formes de pensée, ne ressemblant pas à celles utilisés dans la physique fondamentale, mais plutôt créés mathématiquement par d'autres « axiomes » très différents. Ces différents choix constituent la structure de la réalité non pas de la physique, mais des mathématiques dans son ensemble. Il se pourrait que d'une façon similaire, cette réalité mathématique soit elle-même créée par des conditions *a priori* encore plus générales, et ainsi de suite. Une telle thèse sort du cadre mathématique de l'article, mais il pourrait s'inscrire dans le cadre de la thèse de Kant. On peut également se référer aux travaux décrits dans la référence 24 pour la résolution de ce problème. C'est une piste pour une étude plus approfondie.

De retour maintenant à la réalité physique, la figure 2 (dans la mesure où elle s'applique à la figure 1) exprime le même argument appliqué dans le contexte de la réalité physique. Ainsi, l'hypothèse du principe d'auto-dualité laisse d'autres choix de catégories auto-duales. Disons que nous choisissons les catégories monoïdales fonctorielles / théorie des cordes. Dans ce choix, il y a différents choix de sous-théories. Ceux-ci font partie de la sous réalité de la théorie des catégories monoïdales fonctorielles/théorie des cordes. L'ajout successif d'axiomes qui correspond à une progression vers la droite de la figure 2 ou de la figure 1, crée successivement des sous-réalités. Tout cela parce que nous acceptons l'idée que la réalité physique est créée mathématiquement à partir d'un axiome. Si c'est le mécanisme par lequel la réalité physique est créée, il n'y a pas qu'une réalité, mais beaucoup, une pour chacune des sous-théories S, une pour chacune de ses propres sous-théories, etc., jusqu'au point où nous choisissons de percevoir un fait dans une situation donnée. Il semble approprié d'appeler cette image de la réalité, *réalisme relatif.* En lui, la réalité est créée en tant que structure de toutes les conséquences bien définies d'un choix, mais à chaque étape le catalogue de choix autorisés fait partie d'une réalité plus générale.

En outre, loin d'être une régression à l'infini, ceci ne diffère pas indéfiniment la question de ce qu'est la réalité. Plutôt, comme dans la Fig. 2, la nature du choix devient, en quelques étapes, si générale qu'il devient difficile de le concevoir autrement. Notons que nous ne cherchons pas à réfuter la notion d'une réalité absolue de « choses en soi », mais seulement que cette notion n'est pas nécessaire.

Il faut reconnaître que les observations présentées dans cette section ne sont pas particulièrement nouvelles. La différence est que nous avons tenté de prouver la position en identifiant le choix qui sera fait pour la réalité de la physique (dans les mathématiques) et tenté de démontrer qu'il crée une réalité qui ressemble à la réalité des physiciens.

Pour résumer, en revenant à la fig. 3, nous notons que les objets qui composent la vie quotidienne, des virus aux maisons, sont presque exactement au centre de la zone autorisée. Du point de vue habituel, la raison de ce fait remarquable, c'est que quand nous nous approchons de l'une quelconque des deux zones interdites, les structures doivent devenir plus simples, jusqu'à tendre à ne pas être autorisés du tout. Par conséquent, les structures les plus complexes, où la vie serait la plus susceptible de développer, sont au centre aussi loin que possible des deux régions interdites.

En revanche, nous avons tiré les lois fondamentales de la mécanique quantique et d'une sorte de modèle expérimental de la gravitation dans la section 5 à partir du principe de l'auto-dualité. Ainsi, en supposant que cela peut être réalisé grâce à des modèles plus réalistes, il serait préférable de dire, nous sommes dans le centre de la figure 3 parce que *nous avons créé la physique autour de nous*.

Pour commencer, nous voulions des concepts utiles dans la vie quotidienne (comme les horloges et les vecteurs). Utile ici signifie reproductible ou, de façon équivalente, vérifiables. Cependant, en progressant, nous avons inventé et incorporé des structures de plus en plus abstraites, respectant toutefois la contrainte de théorie / vérifiable par l'expérience, nous avons vite découvert que nous nous étions nous-mêmes insérés dans un « cadre » des structures que nous créions, comme la figure 3 en témoigne.

De toute évidence, beaucoup de travail reste à faire pour affiner le principe d'auto-dualité et les analyses connexes des sections. 3, 4, et 5 si ces conclusions générales se révèlent être pleinement justifiées. Entre temps, le principe d'auto-dualité et le point de vue philosophique décrit ici peut être considéré comme une position dans laquelle une telle analyse, à la fois structurelle et historique, peut être entreprise.

Remerciements

Il y a beaucoup de personnes que je tiens à remercier pour les encouragements et des conseils sur les différentes versions du manuscrit. Parmi eux, E. Seymour, K. Arnaud, A. Miller et S. Odiari. J'ai été soutenu en partie par une bourse Herchel Smith. Je remercie également l'University College de Swansea et le SERC pour le soutien pendant les corrections et mises à jour.

Reçu le 21 juin 1990

Shahn Majid

Notes

1 Comparer référence 12, Chap. 12,1.

2 Le groupe doit être ce que l'on appelle localement compact.

3 Dans le cas où S était un groupe - il n'est plus - l'énoncé précis est AB (Φ) = A (Φ) B(Φ) = Φ(a) Φ(b) = Φ(ab), où la première égalité est la définition de la multiplication dans $\tilde{\tilde{S}}$, la seconde est la définition de la correspondance $\tilde{\tilde{S}} \cong S$, et la troisième est la propriété que (Φ) est une représentation de S. Plus généralement, ce qui est représenté n'est pas une structure de groupe, mais des relations plus complexes entre les éléments de S.

4 C'est, toutes les applications linéaires obéissant à la condition technique supplémentaire d'être positifs. De façon similaire, seuls les éléments auto-adjoints *a* de S sont considérés

comme observables. Bien que physiquement importantes, ces deux restrictions techniques ne sont pas du tout pertinentes pour la présente discussion, donc nous les ignorerons pour l'instant.

5 Cette dualité de l'algèbre de Hopf, en fait, généralise correctement la notion de dualité de Pontryagin pour une certaine sous-catégorie des algèbres de Hopf correspondant à des groupes ou à leurs duaux. Voir, par exemple, référence 3, section 1. Il s'ensuit que les modèles de la mécanique quantique combinés avec la gravitation en utilisant les algèbres de Hopf généralisent les modèles basés sur les groupes examinés dans le paragraphe précédent.

6 Pour un exemple récent cf. observations finales dans référence 21.

7 En tant que sous-produit, nous remarquons que ceci établit également une corrélation intéressante entre l'algèbre de Boole auto-duale et la représentation- auto-duale théorique du présent document. À savoir, la logique, en tant que modèle le plus rudimentaire de la réalité, présente une symétrie bien connue dans laquelle l'utilisation des mots « existe – n'existe pas », « et - ou », « tout - rien », etc. est intervertie. Cette double image serait logiquement équivalente à notre image (par le théorème de De Morgan). On peut faire valoir que, même si à première vue, cette auto-dualité semble être perdue en physique (par exemple, « pommes" courbent l'espace, mais pas « des non-pommes »), elle semble cependant persister dans la théorie conjointe de la mécanique quantique et de la gravitation, en échangeant les pentes gauche-droite dans la Fig. 3. Si nous déclarons que « l'espace est aussi rempli que la théorie d'Einstein le permet » (versant droit de la Fig. 3), de façon équivalente, dans la théorie duale on déclarerait que « l'espace est aussi vide que le principe d'incertitude d'Heisenberg le permet » (versant gauche de la Fig. 3), et vice versa. Les détails seront développés ailleurs. La remarque peut être pertinente pour comprendre le principe au sein d'une vaste thèse kantienne.

Shahn Majid Lyman Laboratory of Physics Harvard University, Cambridge, Massachusetts 02138 U.S.A. **Present address**: Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics University of Cambridge, Cambridge CB3 9EW United Kingdom

Références

1. R. Streater and A. Wightman, *PCT, Spin, Statistics and All That* (Benjamin, Reading, 1964).
2. S. Majid, Ph.D. thesis, Harvard University, 1988.
3. *Idem,* J. Algebra **130,** *17* (1990).
4. *Idem,* Pac. J. Math. **141,** 311 (1990).
5. *Idem, J.* Funct. Analysis **95,** 291 (1991).
6. *Idem,* J. Classical Quantum Gravity **5,** 1587 (1988).
7. *Idem,* Lect. Notes Phys. **375,** 131 (Springer, 1991).
8. *Idem,* Supl. Rend. Circ. Mat. Palermo, to be published.
9. S. Maclane, *Categorie,s for the Working Mathematician* (Springer, 1974), GTM Vol. 5.

10. H. Allison, *Kant's Trancendental Idealism* (Yale University, 1983).

11. Plato, *Plato's Republic* (Hackett, 1974), translation of G.M.A. Grube.

12. A.A. Kirillov, *Elements of the Theory of Representations* (Springer-Verlag, Heidelberg, 1976).

13. I. Segal, *Mathematical Problems of Relativistic Physics (AMS,* 1963).

14. E. Mach, *The Science of Mechanics* (Open Court, 1893), translated by T.J. McCormack, 3rd paperback ed. (1974).

15. A. Einstein, *The Meaning of Relativily* (Chapman and Hall, London, 1922). Reprinted 1980.

16. R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands, *7be Feynman Lectures on Physics* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1963), Vols. I-III.

17. S. Hawking, *Lucasian inaugural address,* Cambridge University, 1982.

18. T.S. Kuhn, *The Structure of Scientific Revolutions,* 2nd ed., with postscript (Chicago, 1969).

19. M.E. Sweedler, *Hopf Algebras* (Benjamin, 1969).

20. S. Majid, Int. J. Mod. Phys. A **5,** 1 (1990).

21. G.'t Hooft, *Proc. XVIth Gin' Int. Seminar on Theoretical Physics, Spain* (World Scientific, 1986).

22. S. Doplicher and J.E. Roberts, Inv. Math **98,** 157 (1989).

23. P. Feyerabend, *Against Method* (London, 1977).

24. I. Lakatos, *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discov-ery* (Cambridge, 1976).