Paradoxe de Klein pour des particules de Spin-0

Nous considérons la diffusion d'une particule d'énergie E et d'impulsion p par une barrière de potentiel électrostatique « échelon » comme définie sur la figure 4.1. Ce problème est classique en mécanique quantique non relativiste. En mécanique quantique relativiste, on va voir que la solution conduit à un « paradoxe » appelé « paradoxe de Klein » quand le potentiel est élevé.

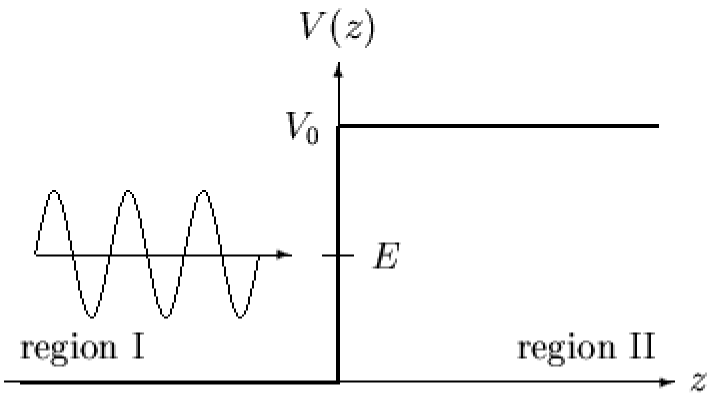

Figure 4.1: Potentiel électrostatique idéalisé par une marche d'escalier, avec une particule scalaire libre incidente d'énergie E se déplaçant vers la droite dans la région I.

Mathématiquement la fonction échelon du potentiel électromagnétique s'écrit

$$\vec{A} = 0 \quad \text{and} \quad A_0 = V(z), \tag{4.137}$$

Où

$$V(z) = \begin{cases} 0 & z < 0, \\ V_0 & z > 0. \end{cases} \tag{4.138}$$

L'équation de Klein-Gordon en présence de ce potentiel s'écrit

$$-\partial_t^2 \phi + \nabla^2 \phi - m^2 \phi = 0 \quad \text{for } z < 0, \tag{4.139}$$

$$(i\partial_t - V_0)^2 \phi + \nabla^2 \phi - m^2 \phi = 0 \quad \text{for } z > 0. \tag{4.140}$$

Un faisceau d'énergie positive entrant (z = - ∞) est de la forme $e^{-i(Et-pz)}$. Nous cherchons des solutions de la forme

$$\begin{aligned} \phi_< &= e^{-iEt}[e^{ipz} + Re^{-ipz}] && \text{for } z < 0, \\ \phi_> &= Te^{-iEt}e^{ip'z} && \text{for } z > 0, \end{aligned} \tag{4.141}$$

Où R et T sont les amplitudes réfléchies et transmises, respectivement et p' est l'impulsion dans la région II. En reportant ces solutions dans l'équation de Klein-Gordon on obtient :

$$E^2 - p^2 - m^2 = 0 \;\Rightarrow\; E = \sqrt{p^2 + m^2} \qquad \text{for } z < 0,$$
$$E^2 + V_0^2 - 2EV_0 - p'^2 - m^2 = 0 \;\Rightarrow\; p' = \pm\sqrt{(E - V_0)^2 - m^2} \qquad \text{for } z > 0. \tag{4.142}$$

On choisit la solution positive de la racine carrée quand z < 0, comme cela est imposé par les conditions initiales de résolution du problème correspondant à un faisceau entrant d'énergie positive. Le signe de la racine carrée pour z > 0   ne peut pas être encore précisé.

Dans la région II il y a trois cas distincts dépendant de l'amplitude du potentiel. Ceci est montré en figure 4.2.

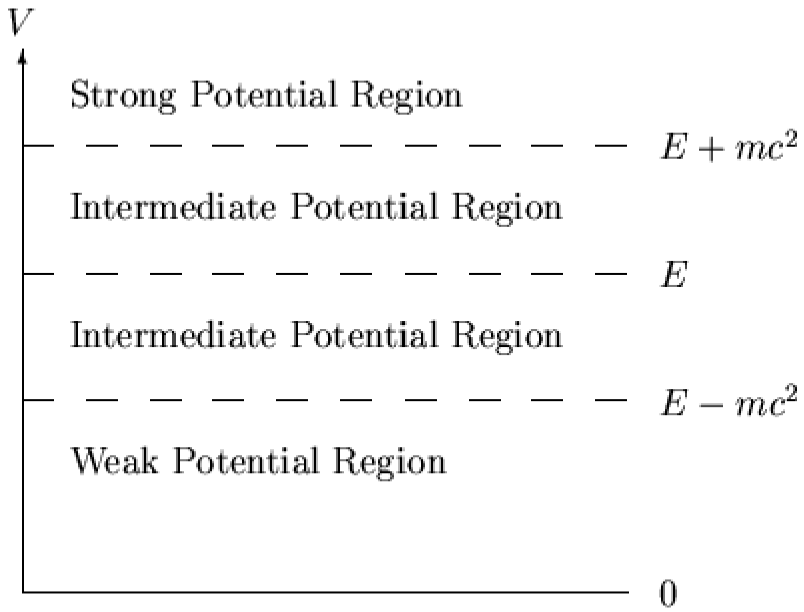

Figure 4.2: Diagramme de niveau d'énergie pour une particule en région II.

Potentiel faible:

$V_0 < E - m \Rightarrow E - V_0 > m \Rightarrow p'$ est réel

Potentiel intermédiaire:

$(E - m) < V_0 < (E + m) \Rightarrow |E - V_0| < m \Rightarrow p'$ est purement imaginaire

Potentiel fort:

$V_0 > E + m \Rightarrow |E - V_0| > m \Rightarrow p'$ est réel.

Nous voyons que p' peut être réel, ou imaginaire selon l'amplitude du potentiel V_0. Dans la région de potentiel fort, l'énergie cinétique ($E - V_0$) est négative, ce qui est interdit de façon classique. La vitesse de groupe est donnée par $p'/(E - V_0)$ et est donc dirigée dans le sens contraire à l'impulsion p' dans cette région, si nous choisissons $p' > 0$. Comme la vitesse de groupe est la vitesse du paquet d'onde, c'est comme si le paquet d'onde transmis venait de $+\infty$; ceci en contradiction avec la condition autorisant seulement un paquet d'onde entrant, venant de z = - ∞. Nous devons donc choisir p' < 0 (c.a.d le signe négatif pour la racine carrée de l'équation 4.142) dans le cas d'un potentiel fort. Remarquons que cette condition est imposée par les conditions physiques aux limites, et pas par l'équation de Klein-Gordon.

Imposons comme conditions aux limites que Φ et $\partial_z \Phi$ soient continues à z = 0, cela donne

$$e^{-iEt}(1+R) = Te^{-iEt} \quad \Rightarrow \quad 1+R = T, \tag{4.143}$$

$$e^{-iEt}ip(1-R) = ip'Te^{-iEt} \quad \Rightarrow \quad 1-R = \frac{p'}{p}T. \tag{4.144}$$

En résolvant pour R et T nous obtenons

$$2 = \left(1+\frac{p'}{p}\right)T \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2}{1+p'/p} = \frac{2p}{p+p'}, \tag{4.145}$$

$$1-R = \frac{p'}{p}(1+R) \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1-p'/p}{1+p'/p} = \frac{p-p'}{p+p'}. \tag{4.146}$$

Rappelons nous que le courant est défini par:

$$\vec{j} = \frac{1}{2im}(\phi^* \vec{\nabla}\phi - \phi\vec{\nabla}\phi^*), \tag{4.147}$$

Alors le courant incident vaut:

$$j_I = \frac{p}{m}. \tag{4.148}$$

Les courants résultants à gauche et à droite de la barrière de potentiel sont :

$$\begin{aligned} j_< &= \frac{1}{2im}[(e^{-ipz} + R^* e^{ipz})ip(e^{ipz} - Re^{-ipz}) \\ &\quad -(e^{ipz} + Re^{-ipz})ip(-e^{-ipz} + R^* e^{ipz})], \\ &= \frac{1}{2im} ip[1 + R^* e^{2ipz} - Re^{-2ipz} - |R|^2 + 1 + Re^{-2ipz} - R^* e^{2ipz} - |R|^2], \\ &= \frac{p}{m}(1 - |R|^2), \end{aligned} \tag{4.149}$$

$$\begin{aligned} j_> &= \frac{1}{2im}[T^* e^{-ip'^* z} ip' T e^{ip' z} + T e^{ip' z} ip'^* T^* e^{-ip'^* z}], \\ &= \frac{p' + p'^*}{2m} |T|^2 e^{i(p' - p'^*) z}, \\ &= \begin{cases} \frac{p'}{m}|T|^2 & \text{for } p' \text{ real}, \\ 0 & \text{for } p' \text{ imaginary}. \end{cases} \end{aligned} \tag{4.150}$$

Le coefficient de transmission vaut :

$$\mathcal{T} = \frac{j_>}{j_I} = \frac{p' + p'^*}{2p}|T|^2 e^{i(p' - p'^*)z} = \frac{2p(p' + p'^*)}{(p' + p)(p'^* + p)} e^{i(p' - p'^*)z}. \tag{4.151}$$

Le coefficient de réflexion vaut :

$$\mathcal{R} = \frac{j_I - j_<}{j_I} = 1 - (1 - |R|^2) = |R|^2 = \left|\frac{p - p'}{p + p'}\right|^2. \tag{4.152}$$

Dans le cas du potentiel faible (p' réel), les coefficients de transmission et de réflexion sont :

$$\mathcal{T} = \frac{4pp'}{(p + p')^2}, \quad \mathcal{R} = \left(\frac{p - p'}{p + p'}\right)^2, \quad \mathcal{T} + \mathcal{R} = 1. \tag{4.153}$$

Donc le faisceau incident est partiellement réfléchi et est partiellement transmis. Ceci est semblable aux résultats obtenus dans le cas non relativiste de la mécanique quantique. La dernière expression montre que la probabilité totale est conservée.

Dans le cas du potentiel intermédiaire (p' imaginaire), les coefficients de transmission et de réflexion sont

$$\mathcal{T} = 0, \quad \mathcal{R} = 1, \quad \mathcal{T} + \mathcal{R} = 1. \tag{4.154}$$

Il y a réflexion totale du faisceau, rien n'est transmis. Ceci est semblable aux résultats obtenus dans le cas non relativiste de la mécanique quantique. La dernière expression montre que la probabilité totale est conservée.

Dans le cas du potentiel fort (p' réel et négatif), les coefficients de transmission et de réflexion sont :

$$\mathcal{T} = -\frac{4p|p'|}{(p - |p'|)^2}, \quad \mathcal{R} = \left(\frac{p + |p'|}{p - |p'|}\right)^2 > 1, \quad \mathcal{T} + \mathcal{R} = 1. \tag{4.155}$$

La probabilité est toujours conservée mais au prix d'un coefficient de transmission négatif et d'un coefficient de réflexion qui est supérieur à 1. Il semble que le potentiel fort soulève un paradoxe. Il n'y a pas de paradoxe si nous considérons que dans le cas du potentiel fort, il est suffisamment fort pour créer une paire particules, antiparticule. Les antiparticules sont attirées par le potentiel et génèrent un courant négatif se déplaçant vers la droite. C'est l'explication du coefficient de transmission négatif.
Les particules de leur côté sont repoussées et réfléchies par la barrière, et en se combinant avec le faisceau incident de particules (qui est complètement réfléchi) elle génèrent un courant chargé positivement, vers la gauche avec une amplitude supérieure à celle du faisceau incident.