8- Cet espace-temps est décrit par l'espace-temps de Rindler.[1]

8-1 Equation associée à un observateur uniformément accéléré.

Nous allons montrer qu'un observateur uniformément accéléré, d'accélération propre constante **α,** dans l'espace-temps de Minkowski obéit aux équations suivantes [2]:

$$t(\tau) = \frac{1}{\alpha}\sinh \alpha\tau$$

$$x(\tau) = \frac{1}{\alpha}\cosh \alpha\tau \qquad (8\text{-}1\text{-}1)$$

Où τ est le temps propre. Ici nous utilisons une définition paramétrique via le temps propre $\boldsymbol{\tau}$, qui est un paramètre affine de la trajectoire, au lieu d'une équation définissant $\boldsymbol{x}$ en fonction de t.

Nous allons obtenir les mêmes résultats, la définition présente étant plus dans l'esprit de la RG que la précédente. Vérifions que ceci correspond à une accélération constante.

Calculons le vecteur accélération 2D.

Comme l'espace-temps est plat, la dérivée covariante se réduit à la dérivée simple.

$$a^\mu = D^2x^\mu/d\tau^2 = d^2x^\mu/d\tau^2$$

Avec

$$a^t = \alpha \sinh(\alpha\tau)$$

$$a^x = \alpha \cosh(\alpha\tau)$$

et

$$a_\mu = \eta_{\mu\nu}\, a^\nu$$

où

$$\eta_{\mu\nu}$$

est le tenseur métrique de Minkowski

Le calcul du module donne :

$$(a^\mu a_\mu)^{1/2} = (a^t a_t + a^x a_x)^{1/2} = \alpha[-\sinh(\alpha\tau)^2 + \cosh(\alpha\tau)^2]^{1/2} = \alpha[1]^{1/2} = \alpha$$

La trajectoire de notre observateur accéléré satisfait à:

$$x^2(\tau) = t^2(\tau) + \alpha^{-2}$$

8-2 Changement de coordonnées.

Choisissons de nouvelles coordonnées η, ξ ($-\infty < \eta, \xi < \infty$), où a est un paramètre, telles que:

$$t = \frac{1}{a}e^{a\xi}\sinh a\eta \qquad x = \frac{1}{a}e^{a\xi}\cosh a\eta$$

$(x > |t|)$ (8-2-1)

[1] Ce document est extrait du document : Essai sur le paradoxe des fusées de Bell http://www.astromontgeron.fr/Bell's%20Spaceship%20Paradox_francais_28_07_10_court.pdf

[2]Pour les détails voir par exemple [10]“Spacetime and geometry”, p 403-406 S. Carroll, Addison Wisley 2003.

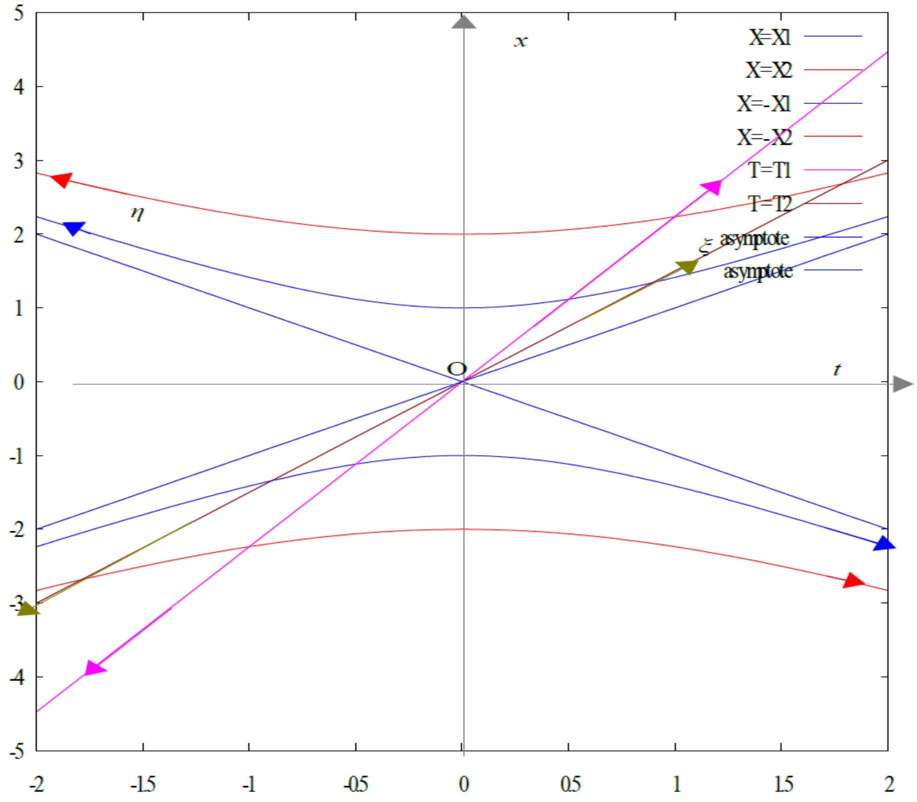

Fig 8-2 [7]: L'espace-temps de Rindler en coordonnées de Minkowski: (On a appelé $\eta = T$, $\xi = X$ sur la légende du diagramme). Ces courbes sont tracées pour $a = 1$.
Les courbes correspondant à ξ = cste, $\xi_1 = 0$ et $\xi_2 = ln2$ sont des hyperboles où η est la coordonnée temps propre τ pour un observateur tel que $\alpha = a$ (pour $\xi_1 = 0$). Pour les autres hyperboles (dont $\xi_2 = ln2$) la relation est $\eta(\tau) = \alpha\tau/a$. Le paramètre ξ en génère la famille infinie. Les droites issues du centre de symétrie sont les coordonnées ξ (à η = constante). Notons que pour $t = 0$, $\eta = 0$ pour toutes les hyperboles et que pour une hyperbole où $\alpha = a$, $\xi = 0$ pour $t = 0$ et $\xi = \infty$ en O.

Dans ces coordonnées la ligne d'univers d'un observateur uniformément accéléré défini en (8-1-1), satisfait aux équations :

$$\eta(\tau) = \alpha\tau/a \qquad (8\text{-}2\text{-}2)$$
$$\xi(\tau) = [\ln(a/\alpha)]/a \qquad (8\text{-}2\text{-}3)$$

Le temps propre est proportionnel à η et la coordonnée spatiale ξ est constante.

Pour un observateur tel que $\alpha = a$, on a :

$$\eta = \tau\,,\ \xi = 0$$

Ceci définit une hyperbole particulière, les autres correspondent à des valeurs de $\alpha \neq a$, dont la coordonnée spatiale constante est donnée par (8-2-3) et le paramétrage en temps propre par (8-2-2).

Dans ces coordonnées la forme de la métrique s'écrit :

$$ds^2 = e^{2a\xi}(-d\eta^2 + d\xi^2) \qquad (8\text{-}2\text{-}4)$$

Cette métrique est stationnaire, mais non homogène. Dans ces coordonnées nous voyons que :

$$x^2 - t^2 = (1/a^2)\, e^{2a\xi}.\cosh^2(a\eta) - (1/a^2)e^{2a\xi}\sinh^2(a\eta) = (1/a^2)\, e^{2a\xi}$$

avec

$(1/a^2)\, e^{2a\xi} = K^2$

pour ξ = *constante* et, en rappelant que a = *constante,* [3] Cette équation est la même que l'équation (7.1).

De:

$$t = \frac{1}{a} e^{a\xi} \sinh a\eta \qquad\qquad x = \frac{1}{a} e^{a\xi} \cosh a\eta$$

Comme a =*constante, on a* x/t = *constante* pour η= *constante:* Cela définit des droites.

8-3 Distance entre deux lignes d'univers d'observateurs accélérés.

Nous tirons la distance spatiale entre les deux lignes d'univers par intégration à $\eta = cste$ à partir de :

$ds = e^{a\,\xi}\, d\xi$, de $\xi = b_1$ à $\xi = b_2$ pour $a = a_1$ et $a = a_2$.

$s = l = \int_{\xi 1}^{\xi 2} e^{a\xi}\, d\xi = 1/a[e^{k\xi_2} - e^{k\xi_1}]$

Nous voyons que comme la métrique dépend non linéairement de ξ, la coordonnée spatiale est "courbée". Par contre la distance entre les deux hyperboles, mesurée sur les rayons vecteurs issus du centre de symétrie (porteurs de la coordonnée ξ), est constante, propriété que nous avions démontrée dans le chapitre 7.

L'espace-temps décrit au chapitre 7 (ou tout du moins une région) est bien l'espace-temps de Rindler où α est le paramètre d'accélération et ξ est un paramètre d'espace générant la famille infinie d'hyperboles.

Le système de coordonnées de Rindler réalise un feuilletage de l'espace-temps de Minkowski par les lignes d'univers accélérée, hyperboles de type temps, à coordonnées spatiale constante, et par la distance entre ces lignes, de type espace à cordonnée temporelle constante.

[3]En fait le paramètre a permet de définir un paramétrage des coordonnées. Une même hyperbole dans le plan (x, t) est définie par $(1/a^2)\, e^{2a\xi} = K^2$, à chaque valeur de a correspond un ξ différent. Idem pour le paramétrage de η.