

Structure Globale des champs gravitationnels de la famille Kerr –Newman

Par B. Carter 1968 (Cambridge)

Traduction libre de J. Fric qui endosse la responsabilité des erreurs que sa traduction aurait pu introduire. Commentaires personnels en notes de bas de page

Résumé

La famille de Kerr Newman de solutions aux équations d'Einstein et d'Einstein Maxwell est la classe de solutions la plus générale connue aujourd'hui qui permet de représenter le champ d'un corps tournant neutre ou électriquement chargé dans un espace asymptotiquement plat. Quand la charge et le moment angulaire sont petits comparés à la masse, la partie de la variété qui est stationnaire au sens strict est incomplète (limitée par un horizon de Killing).

Pour éliminer cette incomplétude, on construit une solution complète de la Variété par extension analytique. On décrit et on applique certaines méthodes générales pour analyser le comportement causal. On montre que, sauf dans les cas à symétrie sphérique, on rencontre des violations non triviales de la causalité, comme des boucles temporelles qu'on ne peut pas éliminer, pire quand la charge ou le moment angulaire est si grand (par rapport à la masse) que la solution ne comporte pas d'horizons de Killing, la violation de causalité est la plus critique, puisqu'on peut placer n'importe quel point de l'espace-temps dans le futur de n'importe quel autre.

Alors que les symétries (de la solution) ne fournissent que trois constantes du mouvement, il apparaît qu'on peut en trouver une quatrième découlant de la séparabilité inattendue de l'équation de Hamilton Jacobi, avec comme conséquences que non seulement on peut intégrer totalement en termes de quadrature explicite les trajectoires géodésiques mais aussi les trajectoires des particules chargées.

Ceci montre alors que dans la Variété « complète » toutes les géodésiques qui se ne terminent pas sur la singularité en anneau, sont complètes, que celles de type temps ou lumière qui se terminent sur la singularité doivent être entièrement contenues dans l'équateur (ensemble de mesure nulle) et de plus dans le cas avec charge électrique, qu'elles doivent être de type lumière avec une direction bien précise, ce qui est extrêmement restrictif. La signification physique de ces résultats est alors brièvement discutée.

Introduction

Probablement que les problèmes les plus importants en Relativité Générale sont ceux qui concernent les singularités et autres pathologies singulières qui se produisent lors des effondrements gravitationnels. Du fait du nombre réduit de vérifications expérimentales de la Relativité Générale ¹, l'acceptation ou non de cette théorie, dépend largement du caractère physiquement acceptable et raisonnable de ses prédictions.

Si on connaît maintenant bien le résultat de l'effondrement d'un corps en symétrie sphérique, on ne peut pas en dire autant des autres cas plus généraux, car à part les travaux de Penrose et Hawking on sait peu de chose sur le cas avec moment angulaire par exemple.

¹ La situation s'est améliorée aujourd'hui

C'est pour cela qu'il est intéressant d'étudier plus en détail les propriétés de la famille Kerr de champs gravitationnels, du fait qu'elle est la seule solution connue de l'Equation d'Einstein qui représente le champ extérieur d'un corps en rotation dans un espace-temps asymptotiquement plat.

On montrera que la singularité en anneau, elle-même, dans la partie intérieure du champ de Kerr ne semble pas générer d'effets pathologiques vraiment dangereux hors du plan équatorial (elle est « invisible » sauf depuis le plan équatorial), à la différence de la singularité de Schwarzschild, à symétrie sphérique, qui n'est pas restreinte du fait de la symétrie, au plan équatorial. Pourtant, on va rencontrer dans la solution de Kerr un comportement topologiquement très complexe et une violation non triviale du principe de causalité.

Pour que cela ait un sens physique, il faudrait montrer (cela reste à faire) qu'une telle métrique peut effectivement résulter physiquement d'un effondrement d'un corps en rotation. Une piste peut être fournie, en suivant la démonstration récente par Israël concernant la solution de Schwarzschild (unicité de la solution statique, dans le vide, pour un espace asymptotiquement plat, délimité par un horizon de Killing simple et non singulier)².

Ici, « simple » signifie que les sections spatiales (à temps constant) sont de topologie sphérique, ce qui suggère que la famille de solutions axisymétriques, stationnaires, dans le vide, d'un espace-temps asymptotiquement plat, avec la même propriété doit être très réduite. On peut conjecturer que les champs de Kerr à faible moment angulaire devraient être les seuls exemples. Si c'est le cas, ou si les autres exemples ont la même pathologie que ces champs de Kerr, alors on peut vraiment douter de la validité de la Théorie d'Einstein dans sa forme actuelle³.

1. Structure physique et topologique

A- Forme de la Métrique

La forme originale, et la plus utile dans de nombreux cas de la famille de solutions de Kerr des équations d'Einstein et de Maxwell (source libre) est décrite analytiquement par des coordonnées u, r, θ et φ dans une Variété résultant du produit topologique d'un 2-plan (plan à 2 dimensions) u, r , étant des coordonnées cartésiennes variant de $-\infty$ à $+\infty$, et d'une 2-sphère (surface de la sphère usuelle), θ et φ étant les coordonnées sphériques usuelles (θ est défini de 0 à π , et φ est périodique de période 2π). La forme covariante du tenseur métrique inclut trois paramètres, m, e et a et s'écrit :

$$\begin{aligned} ds^2 = & \rho^2 d\theta^2 - 2a \sin^2\theta dr d\varphi + 2dr du \\ & + \rho^{-2} [(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2\theta] \sin^2\theta d\varphi^2 \\ & - 2a\rho^{-2}(2mr - e^2) \sin^2\theta d\varphi du \\ & - [1 - \rho^{-2}(2mr - e^2)] du^2, \quad (1) \end{aligned}$$

Et la forme covariante correspondante du tenseur du champ électromagnétique s'écrit :

² B.Carter a ultérieurement fait cette démonstration d'unicité pour la métrique de Kerr]

³ Aujourd'hui ce commentaire serait à nuancer

$$F = 2e\rho^{-4}[(r^2 - a^2 \cos^2\theta)dr \wedge du - 2a^2r \cos\theta \sin\theta d\theta \wedge du - a \sin^2\theta(r^2 - a^2 \cos^2\theta)dr \wedge d\varphi + 2ar(r^2 + a^2) \cos\theta \sin\theta d\theta \wedge d\varphi], \quad (2)$$

Avec :

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2\theta, \quad (3)$$

$$\Delta = r^2 - 2mr + a^2 + e^2, \quad (4)$$

Où le symbole \wedge est celui de l'opération consistant à prendre le produit tensoriel anti-symétrisé. Quand $e = 0$, le champ électromagnétique est nul et la métrique satisfait les équations d'Einstein dans le vide.

Ces solutions sont manifestement stationnaires et axisymétriques avec des vecteurs de Killing $\partial/\partial u$ et $\partial/\partial\varphi$, et il est aussi évident qu'elles sont invariantes par la transformation (discrète) d'inversion par rapport à l'hyperplan équatorial $\theta = \pi/2$.

La forme de la métrique et du champ électromagnétique est analytique, sauf sur la singularité en anneau $r = 0$, $\theta = \pi/2$ où ρ^2 s'annule. En fait la courbure elle-même devient singulière lorsque $\rho^2 \rightarrow 0$, sauf si e et m sont tous les deux nuls. Dans ce cas particulier il y a toujours une singularité lorsque $\rho^2 = 0$ bien que la métrique soit plate partout ailleurs.

Dans tous les cas, la métrique et le champ magnétique sont réguliers partout ailleurs que sur la singularité, sauf pour la dégénérescence triviale en coordonnées sphériques à $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.

Dans tous ces espaces temps, le tenseur de Weyl est de type D dans la classification de Petrov-Pirani, les deux vecteurs nuls (de type lumière) principaux étant donnés par :

$$\begin{aligned} & -\partial/\partial r, \\ (r^2 + a^2)\partial/\partial u + a\partial/\partial\varphi + \Delta\partial/\partial r. \end{aligned} \quad (5)$$

La généralisation de Kundt et Trumper du théorème de Goldberg-Sachs en permet l'intégration produisant deux congruences géodésiques nulles sans cisaillement.

La première (qui est « entrante » dans le sens où r décroît dans la direction du temps déterminée par la croissance de u) est simplement constituée des courbes sur lesquelles u , θ et φ sont tous constants, tandis que la congruence sortante est moins simple dans ces coordonnées. La congruence nulle principale a une rotation non nulle (sauf quand $a = 0$, où les solutions sont à symétrie sphérique) et donc n'est pas orthogonale aux hypersurfaces.

C'est en utilisant les propriétés structurelles du tenseur de Weyl et en s'attachant aux solutions non orthogonales aux hypersurfaces que la métrique dans le vide de la famille a été établie par Kerr.

En conséquence, cette métrique fut établie par Kerr et Schild par une étude systématique des solutions dans le vide dont le tenseur métrique est (localement) la somme d'un tenseur métrique d'espace plat et du produit tensoriel d'un vecteur nul par lui-même.

Les solutions avec charge électrique sont aussi de cette forme comme on peut le voir en faisant la transformation de coordonnées suivante :

$$x + iy = (r + ia)e^{i\varphi} \sin\theta, \quad z = r \cos\theta, \quad t = u - r, \quad (6)$$

Ce qui donne un tenseur métrique :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2 + \frac{2mr - e^2}{r^4 + a^2 z^2} r^2 \times \left(\frac{r(xdx + ydy) - a(xdy - ydx)}{r^2 + a^2} + \frac{zdz}{r} + dt \right)^2, \quad (7)$$

Où r est déterminé implicitement en termes de x, y, z par :

$$r^4 - (x^2 + y^2 + z^2 - a^2)r^2 - a^2 z^2 = 0 \quad (8)$$

Cependant, cette forme de Kerr-Schild dans ce système de coordonnées est plutôt rébarbative pour étudier les structures globales (c'est le prix à payer quand on impose une métrique de fond plate sur une variété de la topologie décrite précédemment), car chaque ensemble de valeurs des coordonnées x, y, z, t correspond à deux points différents, déterminés par les deux valeurs réelles différentes de r déterminée par (8).

Ces coordonnées ont l'autre désavantage de ne pas mettre en évidence l'axe de symétrie, par contre elles ont l'avantage d'éliminer la dégénérescence sur l'axe de symétrie.

La généralisation des solutions pour y inclure un champ électromagnétique fut originellement mise en œuvre, non pas par une méthode systématique logique, mais par une astuce algébrique découverte par Newman et Janis qui réussirent à obtenir la solution de Kerr par transformation de la solution de Schwarzschild (à laquelle elle se réduit quand a est nul). La généralisation avec charge électrique de la solution de Kerr dans le vide, fut obtenue par Newman, Couch, Chinnapared, Exton, Prakash et Torrence qui ont utilisé une transformation similaire à la solution statique chargée à symétrie sphérique de Reissner et Nordström (qui est alors sa limite lorsque a est nul). Carter et Ernst ont établi d'autres démonstrations différentes de cette solution en explicitant mieux les informations sur la courbure.

B. Interprétation du corps en rotation.

Malgré ses avantages, la forme (1) que l'on appellera en conséquence la forme de Kerr Newman, ne met pas en évidence toutes les symétries de l'espace-temps.

Papapetrou a montré que toute solution dans le vide, stationnaire et axi-symétrique des équations d'Einstein a une symétrie discrète additionnelle par inversion simultanée des vecteurs de Killing axiaux et stationnaires, tandis que Boyer et Lindquist ont indépendamment découvert une transformation spécifique qui transforme la métrique de Kerr dans le vide en une forme qui est manifestement invariante par une telle inversion.

Carter a montré que le résultat de Papapetrou peut être généralisé aux cas où l'espace n'est pas vide à condition que le tenseur énergie soit lui-même invariant par cette inversion simultanée du temps et de l'angle axial et que cela est même une règle générale si la seule contribution du tenseur énergie impulsion est un champ électromagnétique généré par une source libre. Ce ne serait pas nécessairement le cas en présence d'un fluide parfait.

Donc le résultat de Papapetrou se généralise directement aux solutions des équations d'Einstein Maxwell pour une source libre et s'applique donc à la solution chargée Kerr Newman.

La transformation spécifique nécessaire pour obtenir une variété manifestement invariante par inversion ($t \rightarrow -t$ et $\varphi \rightarrow -\varphi$) est une généralisation immédiate de celle donnée par Boyer et Lindquist, donc en introduisant un nouveau temps \hat{t} et un nouvel angle de coordonnée $\hat{\varphi}$ définis par :

$$\begin{aligned} d\hat{t} &= du - (r^2 + a^2)\Delta^{-1}dr, \\ d\hat{\varphi} &= d\varphi - a\Delta^{-1}dr, \end{aligned} \quad (9)$$

Nous obtenons la forme désirée de la métrique :

$$\begin{aligned} ds^2 &= \rho^2 \Delta^{-1} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^{-2} \sin^2 \theta [a d\hat{t} - (r^2 + a^2) d\hat{\varphi}]^2 \\ &\quad - \rho^{-2} \Delta [d\hat{t} - a \sin^2 \theta d\hat{\varphi}]^2, \end{aligned} \quad (10)$$

Où les termes croisés entre les coordonnées qu'on peut ignorer, et les autres ont été éliminés. Et la forme du tenseur électromagnétique devient :

$$\begin{aligned} F &= 2e\rho^{-4}(r^2 - a^2 \cos^2 \theta) dr \wedge [d\hat{t} - a \sin^2 \theta d\hat{\varphi}] \\ &\quad - 4e\rho^{-4} ar \cos \theta \sin \theta d\theta \wedge [a d\hat{t} - (r^2 + a^2) d\hat{\varphi}]. \end{aligned} \quad (11)$$

Dans ce système, qu'on appelle la forme de Boyer Lindquist, on voit immédiatement que la métrique se réduit à celle de Reissner- Nordström ou de Schwarzschild, quand a est nul. Par contre, on voit plus facilement que la métrique est plate quand e et m sont nuls sur la métrique (7) à moins d'être très familier avec les coordonnées sphéroïdales.

Il est aussi clair que l'espace défini est asymptotiquement plat, dans le sens local et global à la limite pour des valeurs absolues arbitrairement grandes de r , positives ou négatives.

La forme de Boyer Lindquist (10) et (11) est bien adaptée à l'étude asymptotique des champs, pour laquelle les valeurs des paramètres prennent leur sens. On peut facilement voir dans (10) et (11) par analogie avec les solutions de Schwarzschild et de Reissner- Nordström que (en unités naturelles, avec G , et c valant 1) que m représente la masse et e la charge à la limite pour $r \rightarrow +\infty$ **et que la masse et la charge sont respectivement $-m$ et $-e$** lorsque $r \rightarrow -\infty$. Sans perdre en généralité on peut poser à partir de maintenant que m est positif, ce qui revient à choisir à laquelle des deux régions asymptotiquement plates nous nous référerons pour des valeurs positives de r .

L'interprétation de a est plus délicate, car ses effets sont asymptotiquement d'un ordre plus élevé.

Conformément à une remarque faite originellement par Kerr, Boyer et Price ont montré, en étudiant de près les géodésiques dans le plan équatorial, dans le cas non chargé, que celui produit des forces de type Coriolis qui sont asymptotiquement identiques à celles escomptées d'un corps en rotation de moment angulaire ma dans la limite champ faible (cf Cohen).

Comme les effets sur la métrique de la charge sont d'ordre plus élevé que ceux de la masse, on voit que la conclusion reste valide dans le cas chargé.

Donc nous pouvons raisonnablement considérer que a est le moment angulaire spécifique. La forme de la métrique utilisée ici a été construite de façon qu'à une valeur positive de a corresponde un sens de rotation positif (il se trouve que c'est l'inverse dans la forme utilisée par Boyer et Price).

C'est la présence des effets de rotation qui confèrent aux solutions de Kerr leur importance.

La famille inclut toutes les solutions connues qui peuvent représenter le champ externe de corps en rotation⁴, chargé ou non, les autres solutions asymptotiquement plates telles que celles de Weyl ou Papapetrou, étant soit statique, soit sans masse.

Nous ne savons pas si ce champ extérieur pourrait être celui correspondant à des solutions physiques naturelles matérielles intérieures (par exemple simplement un corps fluide parfait en rotation). Boyer a donné les conditions qui s'appliqueraient sur la surface d'un tel fluide intérieur. Zel'dovich et Novikov ont argumenté que l'absence apparente de la symétrie par inversion simultanée (avant que la transformation de Boyer Lindquist ait été publiée) devrait impliquer qu'un tel corps soit l'objet de circulation méridienne de fluide interne. Maintenant que cette symétrie est connue, on serait tenté de dire le contraire. Cependant, les résultats de Carter et Papapetrou font qu'on ne peut pas du tout faire de telles déductions car cette inversion à l'extérieur est inévitable.

Le paramètre a se couple d'une part avec la masse pour donner le moment angulaire, et comme (11) le montre il se couple aussi avec la charge pour donner un dipôle magnétique de moment asymptotiquement égal à ea . Le rapport gyromagnétique vaut donc e/m . On remarque que nous n'avons aucun degré de liberté là-dessus. Cela vaut la peine de faire remarquer que cela correspond avec une grande précision à ce que donne l'équation de Dirac, pour l'électron par exemple.

Donc, en dépit du fait que les paramètres des solutions ne contiennent que deux ratios indépendants, il est possible de les choisir de telle sorte qu'ils correspondent aux paramètres d'un électron, à savoir (dans le système d'unités où $\hbar = 1$), $m \approx 10^{-22}$, $ma \approx 1/2$ et $e^2 \approx 1/137$. Nous en tirons $a \approx \frac{1}{2} m^{-1} \approx 10^{22}$, $e \approx 1/12$.⁵

La valeur de l'échelle des longueurs alors fixée par a est relativement grande, elle est de l'ordre de grandeur de l'échelle de longueur de Compton⁶.

Par ailleurs la valeur de m est si petite que le champ est très voisin du cas limite où $m = 0$ avec e et a comme seuls paramètres.

Malgré son grand intérêt, la forme de Boyer Lindquist est inutilisable quand Δ s'annule. Cela se produit quand m est plus grand que la valeur critique :

$$m^2 = a^2 + e^2 \quad (12)$$

Pour laquelle Δ vaut zéro pour les deux valeurs de r (positives toutes les deux) qui valent :

⁴ Remarquons au passage, ce que le concept de rotation d'un corps unique dans l'univers, en RG, a de paradoxal, et est en délicatesse, dans cette formulation en tout cas, avec le principe de Mach : en rotation par rapport à quoi ? Mais il existe d'autres manières (par la décomposition en moments multipolaires par exemple), de décrire la même métrique sans explicitement faire référence à la rotation. Et puis il est connu que la Relativité Générale voulue Machienne à l'origine par Einstein, ne l'est pas, ou au mieux que très incomplètement

⁵ Cette possibilité est liée au fait que le facteur gyromagnétique, est celui de l'électron « nu », il n'y a que deux paramètres libres à fixer

⁶ Une analyse dimensionnelle montre également que c'est l'échelle naturelle associée à « a »

$$r_{+-} = m_{+-} (m^2 - a^2 - e^2)^{1/2} \quad (13)$$

et est négatif entre les deux racines. Dans la région intermédiaire la solution change de caractère. On peut voir cela clairement sur la forme (10) que cette région ne peut pas être considérée comme stationnaire au sens strict, car il n'existe plus de vecteurs de type temps dans les plans ($r = \text{constante}$, $\theta = \text{constante}$) des vecteurs de Killing, mais à la place, r joue dans cette région, le rôle d'une variable de type temps. Comme conséquence de la symétrie par inversion simultanée, les hypersurfaces délimitant cette région doivent être de type nul, conformément à un théorème de B. Carter, et doivent de surcroît satisfaire la condition stricte d'horizons de Killing donnée dans cette référence.

Dans le cas particulier où a et e sont nuls, l'horizon interne s'effondre sur la singularité centrale, et l'horizon externe converge vers celui bien connu de l'horizon de Schwarzschild à $r = 2m$. Si l'égalité (12) est satisfaite, les deux horizons convergent à $r = m$. Quand $a^2 + e^2 > m^2$, il n'y a plus d'horizons de Killing, et comme on le montrera plus loin la variété est géodésiquement complète, à l'exception des géodésiques qui rencontrent la singularité centrale à $\rho^2 = 0$. Cependant quand $a^2 + e^2 \leq m^2$, bien que la défaillance locale de la métrique puisse être traitée en revenant au système de coordonnées de Kerr-Newman, la variété définie avant reste incomplète quand r tend vers r_{+-} , du fait qu'il y a des géodésiques pour lesquelles u devient non limité pour une distance affine finie.

En section C nous discuterons des extensions analytiques requises pour remédier à ce problème, et après intégration des équations géodésiques nous montrerons que la variété ainsi étendue est géodésiquement complète, à l'exception comme d'habitude, des géodésiques qui atteignent la singularité à $\rho^2 = 0$.

C. Extension analytique maximale.

Le plus pratique pour construire cette extension est de partir du système de coordonnées initial de Kerr Newman (1) qui est lié à la forme inversible de Boyer Lindquist (10) par les relations de transformation (9). Le point de départ pour l'extension s'appuie sur la remarque que la forme inversible peut être étendue de manière symétrique dans une direction inversée en termes de nouvelles coordonnées temporelles et angulaires w et $\tilde{\varphi}$ par la transformation :

$$\begin{aligned} d\tilde{t} &= -dw + (r^2 + a^2)\Delta^{-1}dr, \\ d\tilde{\varphi} &= -d\tilde{\varphi} + a\Delta^{-1}dr. \end{aligned} \quad (14)$$

Qui donne la forme suivante pour la métrique

$$\begin{aligned} ds^2 &= \rho^2 d\theta^2 - 2a \sin^2\theta dr d\tilde{\varphi} + 2dr dw \\ &+ \rho^{-2}[(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2\theta] \sin^2\theta d\theta \\ &- 2a\rho^{-2}(2mr - e^2) \sin^2\theta d\tilde{\varphi} dw \\ &- [1 - \rho^{-2}(2mr - e^2)]dw^2, \end{aligned} \quad (15)$$

[à noter une erreur typographique à la fin de la deuxième ligne, lire « $d\tilde{\varphi}^2$ » à la place de $d\theta$]

Cette forme est formellement identique à la forme originale (1). La transformation entre les deux formes de Kerr Newman s'en déduit immédiatement :

$$du + dw = 2(r^2 + a^2)\Delta^{-1}dr, \quad (16)$$

$$d\varphi + d\tilde{\varphi} = 2a\Delta^{-1}dr. \quad (17)$$

Dans le cas de racine double de Δ (un horizon double), nous pouvons directement procéder à l'extension. Les transformations (16) et (17) nous donnent complètement le champ des nouvelles coordonnées dans chacune des régions $r > m$ et $r < m$ et elles décrivent deux extensions distinctes, s'appliquant chacune à la région correspondante. En réalisant ces deux types d'extension alternativement, on peut construire une variété étendue constituée d'une séquence infinie de pièces utilisant les coordonnées (u, r, θ, φ) , étiquetés $\dots, (n, -), (n+1, -), \dots$ reliés transversalement par une séquence arrangée symétriquement de pièces utilisant les coordonnées $(w, r, \theta, \tilde{\varphi})$ étiquetés par $\dots, (-, n), (-, n+1), \dots$ se recouvrant alternativement dans les régions $r < m$ et $r > m$. Le recouvrement de région entre $(n, -)$ et $(-, l)$ sera appelé (n, l) .

En ajustant les valeurs relatives de n et l , on peut s'arranger à ce que les recouvrements non vide (n, l) soient tels que $n=l$ (pour une région $r < m$) ou $n=l+1$ (pour une région $r > m$). Nous montrerons dans la section suivante que la variété ainsi obtenue est en fait géodésiquement complète, sauf pour les géodésiques qui touchent la singularité centrale : c'est l'extension maximale.

Dans le cas général ($a^2 + e^2 < m^2$) les zéros de Δ sont distincts, l'extension est plus complexe à réaliser. On commence de la même manière que précédemment sauf que (16) et (17) nous donnent maintenant trois transformations au lieu de deux, qui correspondent à trois régions :

I $r > r_+$, II $r_+ > r > r_-$, III $r_- > r$. Il est donc naturel de construire une variété étendue constituée d'une séquence infinie de pièces utilisant les coordonnées (u, r, θ, φ) , étiquetées $\dots, (n, -), (n+1, -)$, recouvrant une séquence symétrique de pièces utilisant les coordonnées $(w, r, \theta, \tilde{\varphi})$ étiquetés par $\dots, (-, n), (-, n+1), \dots$ de telle sorte que la région de recouvrement (n, l) n'est pas vide seulement si $n=l$ (de type II), ou si $n=l \pm 1$ (type I si n est impair et l pair et de type III autrement). Ceci est illustré dans un autre document de Carter.

Cependant la variété ainsi décrite est toujours incomplète puisqu'elle n'inclut pas les horizons de Killing (2 surfaces obtenues quand u et w tendent tous deux vers l'infini). Nous devons donc rajouter deux nouvelles pièces avec des coordonnées différentes. Pour cela, nous introduisons les coordonnées u et w simultanément, et considérons r comme une coordonnée au lieu d'une fonction de u et w données implicitement, les régions I, II, ou III ont été spécifiées par :

$$F(r) = u + w \quad (18)$$

Où selon (16) :

$$F(r) = 2r + \kappa_+^{-1} \ln|r - r_+| + \kappa_-^{-1} \ln|r - r_-| \quad (19)$$

Avec les constantes κ_{\pm} définies par :

$$\kappa_{\pm} = \frac{1}{2}(r_{\pm}^2 + a^2)^{-1}(r_{\pm} - r_{\mp}). \quad (20)$$

Nous utilisons le procédé, défini par Boyer et Lindquist pour traiter le cas non chargé, consistant à définir une nouvelle variable angulaire, constante le long des trajectoires du champ de vecteurs de Killing particulier qui coïncide avec les générateurs nuls sur l'horizon de Killing. De (5) nous tirons que ce champ de vecteur est défini par $(r_{\pm}^2+a^2)\partial/\partial u+a\partial/\partial\varphi$, dans les coordonnées originales de Kerr Newman (1), qui malheureusement dépend de quel horizon de Killing $r = r_{\pm}$ nous parlons. Donc nous avons besoin de deux autres nouvelles coordonnées angulaires que nous appellerons φ^{\pm} et qui sont définies par :

$$2d\varphi^{\pm} = d\varphi - d\tilde{\varphi} - a(r_{\pm}^2+a^2)^{-1}(du - dw). \quad (21)$$

Nous obtenons alors la forme métrique symétrique double quasi nulle.

$$ds^2 = \rho^{-2}\Delta\left(\frac{\rho^2}{r^2+a^2} + \frac{\rho_{\pm}^2}{r_{\pm}^2+a^2}\right)\frac{(r^2-r_{\pm}^2)a^2\sin^2\theta}{(r^2+a^2)(r_{\pm}^2+a^2)}\frac{1}{4}(du^2+dw^2) + \rho^{-2}\Delta\left[\frac{\rho^4}{(r^2+a^2)^2} + \frac{\rho_{\pm}^4}{(r_{\pm}^2+a^2)^2}\right]\frac{1}{2}(du\,dw) + \rho^2d\theta^2 - \rho^{-2}\Delta a\sin^2\theta\left[a\sin^2\theta d\varphi^{\pm} - \frac{\rho_{\pm}^2}{r_{\pm}^2+a^2}(du-dw)\right]d\varphi^{\pm} + \rho^{-2}\sin^2\theta\left[a\frac{r_{\pm}^2-r^2}{r_{\pm}^2+a^2}\frac{1}{2}(du-dw) - (r^2+a^2)d\varphi^{\pm}\right]^2, \quad (22)$$

Où l'abréviation évidente $\rho_{\pm}^2 = r_{\pm}^2 + a^2 \cos^2\theta$ a été introduite. Cette forme est en elle-même plus restrictive en portée que la forme de Kerr Newman de laquelle nous sommes partis ; en fait elle recouvre les mêmes pièces que la forme de Boyer Lindquist, si on tient compte de la région (I,II,III) dans laquelle la solution de (18) s'applique. Cependant nous sommes en mesure de généraliser directement la méthode utilisée par Carter pour l'axe de symétrie. Quand cette méthode a été proposée, une transformation plutôt compliquée, non seulement pour couvrir les régions manquantes, mais pour couvrir toute la variété avec une seule pièce de coordonnées.

C'était justifié lorsque la symétrie axiale était seule en jeu, cela pourrait aussi être utilisé ici (sauf que la dégénérescence triviale à $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, et la singularité de courbure à $\rho = 0$ subsisteraient), mais le procédé serait laborieux du fait que les coordonnées angulaires φ^{\pm} requises aux horizons sont différentes, de sorte que la coordonnée angulaire devrait évoluer entre les deux, ce qui serait contraire à la symétrie axiale de la variété. Plutôt que de faire cela, nous nous contenterons de compléter la variété en ajoutant les pièces nécessaires une par une. Cet objectif est moins ambitieux, mais il permet d'utiliser des transformations de coordonnées qui sont très simples.

Nous introduisons de nouvelles coordonnées $(x, y, \theta, \varphi^{\pm})$ pour couvrir les quatre pièces $(u, w, \theta, \varphi^{\pm})$ adjacentes aux régions manquantes à $r = r_{\pm}$ (deux de ces pièces auront la forme $(n, n+1)$, $(n+1, n+1)$, et vont couvrir les régions de type II et les deux autres auront la forme (n, n) , $(n+1, n+1)$ et vont couvrir les régions de type I ou III selon que r_{+} ou r_{-} est considéré).

Ces nouvelles coordonnées sont définies par la transformation :

$$x = (\pm)e^{\kappa_{\pm}u}, \quad y = (\pm)e^{\kappa_{\pm}w}, \quad (23)$$

Où le signe +- dans la définition de x change en fonction des deux pièces $(w, r, \theta, \varphi^{\pm})$ invoquées. Nous choisirons les signes de sorte que le produit xy soit positif dans les deux régions où $r = r_{\pm}$ est positif et négatif ailleurs. (Ceci laisse un choix arbitraire de signe dans

la définition de x et y , car du fait de la symétrie par inversion il ne sera pas nécessaire de le faire explicitement). (18) et (19) déterminent r en fonction de x, y :

$$xy = (r - r_{\pm}) G_{\pm}^{-1}(r), \quad (24)$$

Où $G_{+-}(r)$ est défini par :

$$G_{\pm}(r) = e^{-2\kappa_{\pm} r} |r - r_{\pm}|^{|\kappa_{\pm}/\kappa|_{\mp}}. \quad (25)$$

Donc r est une fonction analytique de x et y du fait que dans le plan (x,y) complet r est compris entre r_{+-} et $+\infty$. Nous obtenons alors la nouvelle forme métrique.

$$ds^2 = \rho^{-2} \left(\frac{\rho^2}{r^2 + a^2} + \frac{\rho_{\pm}^2}{r_{\pm}^2 + a^2} \right) \frac{(r - r_{\mp})(r + r_{\pm}) a \sin^2 \theta}{(r^2 + a^2)(r_{\pm}^2 + a^2)} \kappa_{\pm}^2 G_{\pm}^2(r)^{\frac{1}{4}} (y^2 dx^2 + x^2 dy^2) + \rho^{-2} \left(\frac{\rho^4}{(r^2 + a^2)^2} + \frac{\rho_{\pm}^4}{(r_{\pm}^2 + a^2)^2} \right) \\ \times (r - r_{\mp}) \kappa_{\pm}^2 G_{\pm}(r)^{\frac{1}{2}} (dx dy) + \rho^2 d\theta^2 - \rho^{-2} a \sin^2 \theta \left(\Delta a \sin^2 \theta d\varphi^{\pm} - \frac{\rho_{\pm}^2}{r_{\pm}^2 + a^2} (r - r_{\mp}) G_{\pm}(r) \kappa_{\pm} (y dx - x dy) \right) d\varphi^{\pm} \\ + \rho^{-2} \sin^2 \theta \left((r^2 + a^2) d\varphi^{\pm} + a \frac{r + r_{\pm}}{r_{\pm}^2 + a^2} \kappa_{\pm} G_{\pm}(r)^{\frac{1}{2}} (y dx - x dy) \right)^2. \quad (26)$$

Cette métrique est manifestement analytique partout sur la pièce $(x, y, \theta, \varphi^{\pm})$ à l'exception de la singularité de courbure pour $\rho^2 = 0$.

Nous devons aussi vérifier qu'elle ne dégénère pas à sur l'horizon de Killing à $x=0$ et $y=0$ car la transformation que nous avons utilisée est singulière pour ces valeurs. Ceci est immédiat. Il s'ensuit qu'aucune dégénérescence autre que celles triviales pour $\theta=0, \theta=\pi$ et pour la singularité de courbure pour $\rho^2=0$. Nous avons maintenant obtenu, dans ce système de coordonnées, une extension maximale, qui est géodésiquement complète (avec les restrictions habituelles). Nous le montrerons en section 3B, après avoir résolu l'intégration des géodésiques.

La forme (26) qui a le mérite d'exister, se révèle peu pratique d'utilisation. Cependant elle montre clairement l'existence d'hypersurfaces de type espace $x = K^2 y$ où K est une constante réelle quelconque, non nulle, qui s'étend à travers la variété, et qui passe par tous les points de la région $r > r_{+}$. De telles hypersurfaces n'existent pas dans les régions $r < r_{-}$, du fait de la courbure infinie à $\rho^2 = 0$.

2. Causalité

A- Parties de la solution de Kerr Newman où la causalité est respectée.

Dans cette discussion le principe de causalité implique qu'il n'y ait pas de boucle causale (par exemple des courbes de type temps ou nul), dans l'espace-temps considéré. Cette condition peut être violée de deux manières. On peut dire que la violation est triviale si aucune des courbes causales fermées n'est homotopique à zéro, car dans ce cas nous pouvons construire un recouvrement de cet espace dans lequel le principe de causalité est satisfait, et nous pouvons utiliser cet espace de recouvrement pour donner une interprétation physique au phénomène ; nous dirons qu'il y a violation de causalité quand il existe les lignes d'univers de type temps homotopiques à zéro, qu'on ne peut pas éliminer, autrement qu'en changeant localement la structure de l'espace-temps et pas seulement ses propriétés globales de connectivité.

Quelques-unes des violations triviales de causalité de membres de cette famille ont été déjà discutées. Fuller et Wheeler ont considéré la possibilité de violation de causalité, de la multiconnexité résultant de l'identification de deux espaces temps asymptotiquement plat, dans la métrique d'extension maximale de Schwarzschild, la gorge de Kruskal, devenant un trou de ver ; ils ont montré qu'en fait la violation de causalité ne peut pas se produire ainsi. Par ailleurs l'auteur a fait remarquer que des identifications de la sorte pourraient conduire à des violations de causalité dans les solutions de Reissner-Nordström et de Kerr (l'argument dans ce dernier cas dépend purement des propriétés de l'axe de symétrie).

Cependant dans ce cas les violations de causalité résulteraient d'identifications non nécessaires qui engendreraient une topologie multi-connexe.

Dans ce chapitre nous allons étudier la violation de causalité du type intrinsèque, qui fut d'abord étudiée dans l'univers de Godel.

Nous avons vu au chapitre 1, que par construction, que la description analytique maximale de la Variété nécessitait d'assembler plusieurs pièces et nous avons défini des régions de Type I, et III où les surfaces de transitivité sont partout de type temps et une région de type II où les surfaces de transitivité sont de type espace, toutes ces pièces étant délimitées par des hypersurfaces de type nul (horizons de Killing).

Sous réserve que nous ne fassions pas d'identifications non nécessaires entre certaines de ces pièces, et que nous les assemblions exactement comme stipulé au chapitre 1 et illustré en référence 23, une courbe causale qui quitte une de ces pièces ne peut jamais y retourner. Il s'ensuit qu'en ce qui concerne la violation non triviale de causalité, nous devons considérer ces pièces séparément.

Un critère très utile d'inexistence de boucles causales dans un espace orienté dans le temps est l'existence d'une hypersurface de type espace qui est une sous variété immergée au sens propre, dans le sens de Stenberg, du fait qu'une boucle causale ne peut pas couper une telle hypersurface si cette boucle est homotopique à zéro et en conséquence les deux sont impossibles dans un espace simplement connexe.

(Ceci résulte du fait que comme l'immersion est propre, le nombre de fois que la courbe traverse l'hypersurface ne peut varier que par pas de deux, à un moment, par l'homotopie, donc si l'homotopie part de zéro, à toutes les étapes à chaque traversée dans le sens du temps, correspondra une traversée dans le sens opposé, alors qu'une courbe causale ne peut traverser que dans le sens du temps).

Hawking et Geroch ont donné des méthodes (différentes) pour construire un espace de recouvrement qui conserve la topologie de telles hypersurfaces de type temps et qui permettent l'éliminer les boucles causales qu'il contient en les « déroulant ». **Ceci montre explicitement qu'un espace contenant une hypersurface de type espace immergée au sens propre en chaque point ne peut pas violer la causalité de façon non triviale.**

Appliquons ce critère à la solution de Kerr. Nous avons vu au chapitre 1 que quand $a^2 + e^2 < m^2$, une telle hypersurface de type espace existe en chaque point dans la région I ($r > r_+$), et la forme de Boyer Lindquist (10) montre clairement que les hypersurfaces $r = \text{constante}$ en tout point de la région II ($r_- < r < r_+$) satisfont aussi la condition requise. En conséquence tout région connexe $r > r_-$ dans la variété que nous avons construite ne peut pas avoir des violations de causalité non triviales, de plus comme chacune de ses régions est simplement connexe les violations de causalité même triviales ne peuvent pas se produire et en conséquence la totalité de la région correspondant à $r > r_-$ respecte intégralement la causalité.

Si $a^2 + e^2 = m^2$, les surfaces $\hat{t}=\text{const}$ dans la forme de Boyer Lindquist satisfont aussi la condition, et nous pouvons en conclure que dans ce cas aussi, pour $r > r_- (= m)$ la causalité est bien respectée.

Par contre, quand $a^2 + e^2 \leq m^2$, nous ne pouvons pas tirer de telles conclusions pour les régions $r < r_-$, et nous ne pouvons pas appliquer ce critère partout, quand $a^2 + e^2 > m^2$.

B. Violations de Causalité dans les solutions de Kerr.

Dans un article séparé (réf. 28), l'auteur a établi un critère caractérisant une violation de causalité qui est applicable à n'importe quel espace muni d'un groupe d'isométrie abélien qui est transitif partout sur des surfaces de type temps. Ce critère stipule que s'il n'existe pas un co-vecteur d'algèbre de Lie (une application linéaire de l'algèbre de Lie sur les nombres réels) tel que la forme différentielle correspondante dans chaque surface de transitivité est partout de type espace ou nulle, alors l'espace entier est un unique ensemble non trivialement « vicieux » (viole la causalité de façon non triviale).

Dans une terminologie qui généralise le concept de boucle temporelle (considérée comme un cycle vicieux), un ensemble vicieux est défini comme un ensemble dans lequel chaque point peut être connecté à n'importe quel autre point par à la fois une courbe de type temps orientée dans le sens du temps et une courbe de type temps orientée dans le sens contraire, c'est-à-dire dans lequel la causalité est violée de la manière la plus totale concevable ; par non trivial, nous entendons que cette propriété est conservée dans n'importe quel espace de recouvrement , ce qui nous ramène à la définition de la violation de causalité non triviale précédemment énoncée.

Le groupe généré par $\partial/\partial\hat{t}, \partial/\partial\phi$ dans les coordonnées de Boyer Lindquist satisfait les conditions requises d'application de ce critère dans les régions $r < r_-$ quand $a^2 + e^2 \leq m^2$ et dans toute la variété quand $a^2 + e^2 > m^2$, là où le précédent critère ne s'appliquait plus.

Choisir un co-vecteur d'algèbre de Lie signifie en fait choisir une forme différentielle $\omega = Kd\hat{t} + Ld\phi$ sur les surfaces de transitivité où K et L sont des constantes arbitraires.

Le critère sera satisfait s'il n'est pas possible de choisir K et L de sorte que ω soit partout de type espace dans la métrique induite sur les surfaces de transitivité. Il est facile de voir que le choix le plus évident, \hat{t} lui-même, est de type espace partout sauf dans une sous-région où

$$r^2 + a^2 + \rho^2 (2mr - e^2) a^2 \sin^2\theta < 0 \quad (27)$$

Donc, on peut vérifier facilement qu'aucun choix de ω ne satisfait les conditions requises dans toute la région sauf en cas de symétrie sphérique. Donc dans le cas où $a^2 + e^2 \leq m^2$ ($a \neq 0$), chaque région définie par $r < r_-$ est un ensemble vicieux et la frontière $r = r_-$ est un horizon causal ; dans le cas où $a^2 + e^2 > m^2$ ($a \neq 0$), l'espace entier est un ensemble unique vicieux.

Les détails essentiels de la violation de causalité peuvent s'expliquer comme suit.

Dans le cas sans charge, la condition (27) est satisfaite dans une petite région où r est négatif au voisinage immédiat de la singularité en anneau, et dans le cas chargé, la région est plus étendue et inclut des valeurs positives de r , bien que ne s'étendant jamais au-delà du point défini par $r^2=e^2$ pour r positif, ou là, où r^2 est égal au plus grand des nombres a^2, e^2 ou $4m$ pour r négatif.

Dans cette région le vecteur $\partial/\partial\phi$ est de type temps, donc les cercles $\hat{t}=\text{const}$, $r=\text{const}$, $\theta=\text{const}$, sont eux même des boucles temporelles. Cependant, bien qu'il soit nécessaire que chaque boucle temporelle doive pénétrer dans la région définie par (27) l'application du critère de la référence [28] montre qu'il n'y est pas confinée et qu'elle peut

s'étendre sur n'importe quelle autre partie de la région ($r < r_-$) ou sur toute la variété dans le cas $a^2 + e^2 > m^2$. Ce critère implique qu'on ne peut pas les éliminer dans un espace de recouvrement. En fait, comme notre variété dans sa totalité, comme elle a été décrite est simplement connexe, il n'y a pas d'espace propre de recouvrement, mais comme la géométrie est singulière à $\rho^2 = 0$, on peut aussi bien considérer la variété, dont on a exclu cette singularité en anneau pour ce qui concerne la physique. Comme il y aurait alors des courbes non homotopiques à zéro, se bouclant autour de la singularité, ce serait possible de construire de nombreux espaces de recouvrement qui ouvriraient ces boucles partiellement ou totalement.

Quand $a^2 + e^2 > m^2$, le recouvrement universel va être constitué d'une infinité de séquences linéaires mais quand $a^2 + e^2 \geq 0$ on va obtenir une topologie de branchement sans fin très compliquée. Cependant comme les boucles temporelles ne nécessitent pas de tourner autour de l'anneau, leur existence n'est affectée par ce procédé. Une manière plus expéditive d'obtenir un espace de recouvrement serait de couper selon l'axe de symétrie $\theta = 0, \theta = \pi$, de dérouler l'espace résultant et de considérer ϕ comme une coordonnée non périodique. Ce procédé ne serait physiquement pas raisonnable car il créerait artificiellement une singularité à la limite quand $\theta \rightarrow 0$, ou $\theta \rightarrow \pi$.

De plus cela ne suffirait même pas à éliminer les boucles temporelles, car l'impossibilité de trouver une combinaison ω convenable ne dépend pas de la présence de l'axe de rotation. (Les cercles simple décrits ci-dessus cesseraient par contre d'exister). Il est plutôt facile de comprendre la nature générale des boucles temporelles plus compliquées. A l'extérieur de la région (27) la coordonnée t doit croître uniformément sur une ligne temporelle, même si r et θ peuvent varier dans n'importe quelle direction dans la région considérée ($r < r_-$ ou l'espace complet si $a^2 + e^2 > m^2$), ϕ presque partout également sauf dans une partie de la région satisfaisant à la condition :

$$\rho^2 + e^2 - 2mr < 0, \quad (28)$$

Où $\partial/\partial t$ devient de type espace. Pour rattraper le temps écoulé, le chemin doit pénétrer dans la zone (27). Ici on peut gagner du temps, mais au prix d'une variation (négative pour $a > 0$) importante de la coordonnée ϕ . On peut montrer que dans tous les cas, la limite supérieure, la plus faible, du temps que l'on peut gagner, par unité de variation angulaire, est $|a|$. Cependant, ceci n'empêche pas des boucles temporelles même lorsqu'on supprime l'axe de symétrie et qu'on rend la coordonnée ϕ non périodique, car pour une trajectoire suffisamment proche de l'axe de symétrie, la perte angulaire peut être réalisée pour un coût très faible en temps.

Pour résumer, dans le cas où $a^2 + e^2 > m^2$, la région centrale a les propriétés d'une machine temporelle. Il est possible, partant de n'importe quel point de la région (même très loin de la singularité), de voyager jusqu'à cette zone (28), reculer dans le temps (t) autant que désiré à un taux de $2\pi|a|$ par tour autour de l'axe et ensuite retourner à la position initiale. (en ayant un mouvement à toutes les étapes suffisamment proche du cône de lumière, le temps propre dans le procédé peut être maintenu en dessous de n'importe quelle limite non nulle donnée, sauf s'il y a une contrainte sur l'accélération permise, auquel cas il se pourrait que ce ne soit pas possible.

Dans le cas où $a^2 + e^2 \leq m^2$, les parties externes de l'espace-temps pour $r > 0$ respectent la causalité et il y a même une surface de Cauchy partielle. Cependant l'hypersurface nulle $r =$

$r-$ est un horizon causal, une ligne d'univers de type temps traversant (irréversiblement) cet horizon entre dans une région où la causalité est violée comme dans le cas précédent.

3. Géodésiques et orbites

A. Intégration des équations géodésiques et d'orbite

Les équations du mouvement d'une particule de test de masse μ et de charge ε sont données par :

$$D^2x^i/D\tau^2 = (\varepsilon/\mu)F_k{}^i(Dx^k/D\tau), \quad (29)$$

Où $D/D\tau$ dénote la dérivée covariante par rapport au temps propre τ et F est le tenseur de champ électromagnétique. Ces équations peuvent être dérivées du Lagrangien.

$$L = \frac{1}{2}g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j + \varepsilon A_i\dot{x}^i, \quad (30)$$

Où le vecteur potentiel covariant a été introduit, défini par :

$$F = 2 dA \quad (31)$$

Et où un point sur un symbole dénote la dérivée ordinaire par rapport à un paramètre affine λ . Pour satisfaire (29), λ doit être relié au temps propre par :

$$\tau = \mu\lambda \quad (32)$$

Ce qui est équivalent à imposer la condition de normalisation :

$$g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = -\mu^2. \quad (33)$$

En prenant les valeurs nulles et négatives de μ^2 dans (33) et en posant $\varepsilon = 0$, le même lagrangien peut être utilisé pour donner les géodésiques nulles et de type espace.

[Lorsqu'il n'y a pas de charge, la valeur effective de la masse (de test) n'a pas de signification et ainsi nous pouvons obtenir les géodésiques de type temps et de type espace avec λ comme paramètre de métrique en posant $\mu^2 = \pm 1$ dans (33)].

Pour mettre cela sous forme Hamiltonienne, introduisons le moment conjugué à partir de (30) :

$$p_i = g_{ij}\dot{x}^j + \varepsilon A_i \quad (34)$$

Nous obtenons ainsi le Hamiltonien :

$$H = \frac{1}{2}g^{ij}(p_i - \varepsilon A_i)(p_j - \varepsilon A_j). \quad (35)$$

Comme il ne dépend pas explicitement de λ , le Hamiltonien est automatiquement une constante du mouvement, et on voit que c'est cette constante qui est déterminée par la condition de normalisation (33). Donc nous avons :

$$H = -\frac{1}{2}\mu^2. \quad (36)$$

Nous allons travailler avec la forme de Kerr-Newman de la métrique car elle est simple et car les pièces de coordonnées correspondantes couvrent toute la variété à l'exception des surfaces ($x=0, y=0$) dans la forme (26).

Le vecteur potentiel le plus simple qui décrit le champ (2) par (31) vaut :

$$A = e\rho^{-2}r(du - a \sin^2\theta d\varphi). \quad (37)$$

Donc de (1) nous obtenons pour l'impulsion

$$p_u = -[1 - \rho^{-2}(2mr - e^2)]\dot{u} - a\rho^{-2}(2mr - e^2) \times \sin^2\theta \dot{\varphi} + \dot{r} + e\rho^{-2}r, \quad (38)$$

$$p_\varphi = -a\rho^{-2}(2mr - e^2) \sin^2\theta \dot{u} + \rho^{-2}[(r^2 + a^2)^2 - \Delta a \sin^2\theta] \sin^2\theta \dot{\varphi} - a \sin^2\theta \dot{r} - e\rho^{-2}ar \sin^2\theta, \quad (39)$$

$$p_r = \dot{u} - a \sin^2\theta \dot{\varphi}, \quad (40)$$

$$p_\theta = \rho^2\dot{\theta}. \quad (41)$$

La métrique inverse de (1) est :

$$\begin{aligned} (\partial/\partial s)^2 = & \rho^{-2}(\partial/\partial\theta)^2 + 2\rho^{-2}(r^2 + a^2)(\partial/\partial r)(\partial/\partial u) \\ & + 2\rho^{-2}a(\partial/\partial r)(\partial/\partial\varphi) + 2\rho^{-2}a(\partial/\partial u)(\partial/\partial\varphi) \\ & + \rho^{-2}a \sin^2\theta(\partial/\partial u)^2 + \rho^{-2} \sin^2\theta(\partial/\partial\varphi)^2 \\ & + \rho^{-2}\Delta(\partial/\partial r)^2 \end{aligned} \quad (42)$$

Ceci nous permet d'obtenir le Hamiltonien :

$$H = \frac{1}{2}\rho^{-2}\{\Delta p_r^2 + 2[(r^2 + a^2)p_u + ap_\varphi - \varepsilon er]p_r + p_\theta^2 + [a \sin\theta p_u + \sin^{-1}\theta p_\varphi]^2\}. \quad (43)$$

Des symétries, nous obtenons immédiatement deux constantes du mouvement correspondant à la conservation de l'énergie E , et à la conservation du moment angulaire par rapport à l'axe de symétrie Φ . Cela donne :

$$p_u = -E, \quad (44)$$

$$p_\varphi = \Phi. \quad (45)$$

Nous avons de plus la constante du mouvement donnée par (36) correspondant à la conservation de la masse.

Ces trois intégrales premières sont suffisantes pour déterminer le mouvement seulement quand on impose des restrictions qui réduisent le problème à trois ou moins de dimensions. Le cas sphérique correspond en fait à trois degrés de liberté, analyse détaillée faite par Darwin pour le cas sans charge et par Graves et Brill dans le cas chargé.⁷

Il s'applique aussi à des sous espaces convenables dans le cas le plus général, en particulier, le cas à symétrie axiale qui a été analysé par Carter et cas à symétrie plane équatoriale qui a été analysé par Boyer et Price dans la limite asymptotiquement plane et par Boyer et Lindquist dans les régions intérieures (tous ne s'appliquant qu'aux cas d'espaces vides).

Pour traiter le cas général, nous avons besoin d'une quatrième intégrale première du mouvement qui ne peut pas venir des symétries évidentes de la métrique. Cependant, on peut obtenir une telle intégrale en tirant profit du fait inattendu que l'équation de Hamilton Jacobi peut être résolue en séparant les variables dans le système de coordonnées (1), et avec le choix de jauge (37). (La méthode marcherait aussi en coordonnées de Boyer Lindquist avec un choix analogue de vecteur potentiel, mais la transformation invoquant les coordonnées non ignorables r, θ détruirait la séparabilité).

La forme générale de l'équation de Hamilton Jacobi se déduit de (35) :

$$\partial S/\partial \lambda = \frac{1}{2} g^{ij} [(\partial S/\partial x^i) - \varepsilon A_i][(\partial S/\partial x^j) - \varepsilon A_j], \quad (46)$$

où S est l'action de Jacobi : rappel : $\partial S/\partial x^i = p_i$.

S'il y a une solution séparable, alors elle doit, en termes de constantes du mouvement déjà connues, prendre la forme :

$$S = -\frac{1}{2} \mu^2 \lambda - E u + \Phi \varphi + S_\theta + S_r, \quad (47)$$

où S_θ et S_r sont respectivement fonction de θ et de r seulement. En insérant cela dans (43), nous voyons que l'équation qui se sépare peut être mise sous la forme :

$$\begin{aligned} (dS_\theta/d\theta)^2 + a^2 \mu^2 \cos^2 \theta \\ + (aE \sin \theta - \Phi \sin^{-1} \theta)^2 = -\Delta (dS_r/dr)^2 \\ + 2[(r^2 + a^2)E - a\Phi + \varepsilon r] dS_r/dr - \mu^2 r^2. \end{aligned} \quad (48)$$

Les deux membres doivent être égaux à une nouvelle constante du mouvement que nous dénoterons κ . On voit sur la forme du membre de *gauche*⁸ que κ doit être positif quand μ est réel, pour les orbites de particules et les géodésiques de type temps ou nul. En utilisant les relations $p_\theta = \partial S/\partial \theta$ et $p_r = \partial S/\partial r$, on peut relier cela directement à l'impulsion et obtenir la forme :

$$p_\theta^2 + (aE \sin \theta - \Phi \sin^{-1} \theta)^2 + a^2 \mu^2 \cos^2 \theta = \mathcal{K}, \quad (49)$$

$$\Delta p_r^2 - 2[(r^2 + a^2)E - a\Phi + \varepsilon r] p_r + \mu^2 r^2 = -\mathcal{K}. \quad (50)$$

Avec (44) et (45) cela nous donne un jeu complet d'intégrales premières du mouvement. [Il est facile de vérifier directement, sans considérer l'action, que les expressions (49) et (50)

⁷ En fait, dans ce cas, on peut fixer arbitrairement θ (à $\pi/2$ par exemple, sans nuire à la généralité du problème.

⁸ Correction d'une erreur typographique

sont en fait constantes, car il est pratiquement évident que leurs crochets de Poisson avec le Hamiltonien s'annulent)]

L'équation (48) peut être résolue complètement par quadrature. Elle se sépare pour donner deux équations différentielles ordinaires :

$$dS_{\theta}/d\theta = \sqrt{\Theta}, \quad (51)$$

$$dS_r/dr = \Delta^{-1}(P + \sqrt{R}), \quad (52)$$

où les fonctions $\Theta(\theta)$, $P(r)$, $R(r)$ sont définies par :

$$\Theta = Q - \cos^2\theta [a^2(\mu^2 - E^2) + \Phi^2 \sin^{-2}\theta], \quad (53)$$

$$P = E(r^2 + a^2) - \Phi a + \varepsilon r, \quad (54)$$

$$R = P^2 - \Delta(\mu^2 r^2 + \mathcal{K}), \quad (55)$$

Et où nous avons défini, pour des raisons pratiques, une nouvelle constante Q liées aux autres par :

$$Q = \mathcal{K} - (\Phi - aE)^2. \quad (56)$$

Alors la solution finale pour l'action de Jacobi est :

$$S = -\frac{1}{2}\mu^2\lambda - Eu + \Phi\varphi + \int^{\theta} (\sqrt{\Theta})d\theta + \int^r \Delta^{-1}Pdr + \int^r \Delta^{-1}(\sqrt{R})dr, \quad (57)$$

où le signe des deux racines carrées sont indépendants lune de l'autre, et où la borne inférieure d'intégration n'est pas spécifiée, du fait que seule la variation de l'action est importante.

Les formes intégrées des géodésiques et orbites peuvent être maintenant obtenues automatiquement en utilisant le fait que les dérivées partielles de l'action de Jacobi par rapport aux constantes du mouvement sont elles-mêmes des constantes⁹.

Alors en différenciant par rapport à κ , μ^2 , E et Φ nous obtenons respectivement :

⁹ Rappelons qu'une fonction $I[x(t), v(t)]$ des coordonnées de l'espace des phases est appelée intégrale du mouvement si $dI/dt = 0$. S'il existe plusieurs intégrales du mouvement I_1, \dots, I_n alors toute fonction $f(I_1, \dots, I_n)$ satisfait à $df/dt = \sum_{k=1, n} (\partial f/\partial I_k)(dI_k/dt) = 0$. Si on calcule $\partial f/\partial I_n$ on obtient $f'(I_n) \sum_{k=1, n-1} (\partial f/\partial I_k)(dI_k/dt) + dI_n/dt = 0$, car $dI_n/dt = 0$ et $\sum_{k=1, n-1} (\partial f/\partial I_k)(dI_k/dt) = 0$. Donc c'est bien une intégrale du mouvement : CQFD

$$\int^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\Theta}} = \int^r \frac{dr}{\sqrt{R}}, \quad (58)$$

$$\lambda = \int^{\theta} \frac{a^2 \cos^2 \theta d\theta}{\sqrt{\Theta}} + \int^r \frac{r^2 dr}{\sqrt{R}}, \quad (59)$$

$$u = \int^{\theta} \frac{-a(aE \sin^2 \theta - \Phi) d\theta}{\sqrt{\Theta}} + \int^r \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \left(1 - \frac{P}{\sqrt{R}}\right) dr, \quad (60)$$

$$\varphi = \int^{\theta} \frac{-(aE - \Phi \sin^{-2} \theta) d\theta}{\sqrt{\Theta}} + \int^r \frac{a}{\Delta} \left(1 - \frac{P}{\sqrt{R}}\right) dr, \quad (61)$$

où $\sqrt{\Theta}$ et \sqrt{R} peuvent prendre n'importe quel signe indépendamment ¹⁰mais où lorsqu'on a fait un choix, il doit être utilisé de façon cohérente dans les équations, et où les limites inférieures d'intégration peuvent être choisies indépendamment dans chaque terme. Pour de nombreuses applications cette information est plus pratique lorsque exprimée en termes de système différentiel du premier ordre.

$$\rho^2 \dot{\theta} = \sqrt{\Theta}, \quad (62)$$

$$\rho^2 \dot{r} = \sqrt{R}, \quad (63)$$

$$\rho^2 \dot{u} = -a(aE \sin^2 \theta - \Phi) + (r^2 + a^2) \Delta^{-1} [(\sqrt{R}) - P], \quad (64)$$

$$\rho^2 \dot{\varphi} = -(aE - \Phi \sin^{-2} \theta) + a \Delta^{-1} [(\sqrt{R}) - P], \quad (65)$$

qui peut être obtenu, soit de la forme explicitement intégrée [(58) à (61)] ¹¹ ou autrement directement de (44), (45) (48) et (50), et où de nouveau les signes de $\sqrt{\Theta}$ et \sqrt{R} peuvent être choisis indépendamment, mais une fois choisi utilisé de façon cohérente.

B. Complétude des géodésiques

Nous allons maintenant pouvoir démontrer que les extensions analytiques obtenues au chapitre 1C sont bien maximales, dans le sens que les seules géodésiques incomplètes sont celles qui heurtent la singularité, ce qui fait qu'elles ne peuvent pas être imbriquées comme sous espace dans une variété plus grande.

Une géodésique est complète si elle peut être étendue sans limite sur son paramètre affine λ .

¹⁰ C'est le carré de p_{μ} qui est défini par l'équation, on a donc les solutions positives et négatives pour les racines,

¹¹ Calculant du et $d\lambda$ et en éliminant une des différentielles partielles en utilisant (58) et en en faisant le rapport

Il apparaît que toute géodésique peut être étendue infiniment sauf si elle rencontre la singularité ou si une des intégrales dans les équations (58), (60) ou (61) diverge. Le dernier cas peut se produire là où Δ a un zéro ou là où Θ ou R ont un double zéro.

Si Θ ou R a un zéro double, alors les intégrales pour λ vont diverger, et λ , lui-même, va être illimité sauf dans les cas où la géodésique rencontre la singularité, pour lesquels les intégrales divergentes pour λ peuvent être capables de se neutraliser. Ceci se voit mieux sur la forme :

$$d\lambda = \rho^2 (d\theta / \sqrt{\Theta}), \quad (66)$$

$$d\lambda = \rho^2 (dr / \sqrt{R}), \quad (67)$$

des équations (62) et (63), que sur (58) et (59) directement. Alors, bien que cette forme couplée ne soit pas utilisable pour une résolution explicite, elle montre clairement qu'il n'y a pas de problème d'incomplétude sauf si la géodésique rencontre la singularité $\rho^2 = 0$.

Alors, si on excepte l'incomplétude liée à la rencontre de la singularité, il ne nous reste plus qu'à considérer le cas les cas où Δ a un zéro, ce qui ne peut arriver que pour des valeurs strictement positives de r . Seules les équations pour u et φ peuvent présenter des divergences, elles peuvent être écrites en formes différentielles comme suit :

$$du = \frac{-a(aE \sin^2\theta - \Phi)}{\sqrt{\Theta}} d\theta + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \left(1 - \frac{P}{\sqrt{R}}\right) dr, \quad (68)$$

$$d\varphi = \frac{-(aE - \Phi \sin^{-2}\theta)}{\sqrt{\Theta}} d\theta + \frac{a}{\Delta} \left(1 - \frac{P}{\sqrt{R}}\right) dr. \quad (69)$$

Ces équations peuvent être réécrites en termes des coordonnées (w, r, θ, φ) données par (16) et (17) comme suit :

$$dw = \frac{+a(aE \sin^2\theta - \Phi)}{\sqrt{\Theta}} d\theta + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \left(1 + \frac{P}{\sqrt{R}}\right) dr, \quad (70)$$

$$d\tilde{\varphi} = \frac{+(aE - \Phi \sin^{-2}\theta)}{\sqrt{\Theta}} d\theta + \frac{a}{\Delta} \left(1 + \frac{P}{\sqrt{R}}\right) dr. \quad (71)$$

Maintenant sous réserve que P ne soit pas nul où $\Delta = 0$ nous obtenons à partir de (54) et (55) l'expression :

$$\frac{P}{\sqrt{R}} = \pm \left[1 \pm \frac{\mu^2 r^2 + \Lambda^2}{2P} \left(\frac{\Delta}{P}\right) + O\left(\frac{\Delta}{P}\right)^2 \right], \quad (72)$$

où le signe dépend du choix de \sqrt{R} que nous avons fait. De cela, on peut voir que seule une paire des expressions (68) et (69) ou (70) et (71) contient une véritable divergence à $\Delta = 0$; dans l'autre paire les termes divergents se neutralisent. Donc, bien que la géodésique quitte

une pièce de coordonnées de Kerr Newman, elle peut se poursuivre dans une autre pièce recouvrant la précédente.

Le cas, où P s'annule là où $\Delta = 0$, reste à considérer. Dans ce cas (55) implique que R doit s'annuler au moins une fois là aussi. Si R présente un zéro double pas de problème, car comme nous l'avons vu l'intégrale pour λ diverge de toute façon ; ce doit être nécessairement le cas si Δ a un zéro double, qui montre qu'une extension analytique consistant seulement de pièces de Kerr Newman est suffisante dans ce cas. Nous pouvons donc nous concentrer sur le cas où P s'annule là où $\Delta = 0$ et où Δ et R ont seulement une racine simple là. Dans ce cas nous avons :

$$P/\sqrt{R}=O(\Delta^{1/2}) \quad (73)$$

à la limite tendant vers le zéro de Δ , alors les coordonnées u et w divergent vers $+\infty$ ou $-\infty$ ensemble. Cela signifie simplement que la géodésique atteint un des points $x = 0, y = 0$ dans une des pièces $(x, y, \theta, \varphi_{+-})$ de (26). Comme le voisinage immédiat de ces points est causalement correct, la géodésique peut être prolongée sans problème de l'autre côté.

En travaillant sur les équations géodésiques, dans le système de coordonnées de Kerr Newman, nous avons laissé de côté la possibilité qu'il peut y avoir des géodésiques entièrement contenues dans les 2-surfaces (surfaces 2D) $x=0, y=0$. La symétrie de la forme (26) montre clairement que de telles géodésiques existent.

Cependant, le problème de l'incomplétude ne se pose pas, car les surfaces $x=0, y=0$ sont topologiquement des 2-sphères, et comme (26) le montre elles sont de type espace. Il est bien connu qu'une variété compacte de type espace ne peut pas être incomplète.

Ceci termine notre démonstration que l'extension analytique réalisée au chapitre 1C est maximale et que seules les géodésiques qui heurtent la singularité sont incomplètes. Au passage nous avons montré qu'une particule chargée partage cette propriété. On conjecture généralement que ceci doit se déduire directement de la complétude des géodésiques, mais l'auteur ne connaissant pas de théorème établissant cela, tout ce qu'on peut dire que ceci n'en est pas un contre-exemple.

C. Propriétés qualitatives des géodésiques et orbites.

La simplicité de la fonction Θ qui contrôle la variable θ , permet de voir facilement comment la coordonnée θ varie lors des mouvements géodésiques et orbitaux. (53) montre que non seulement la forme de Θ est bien indépendante de la présence de charge électrique, soit de la particule, soit du champ, mais elle est même indépendante du paramètre de masse générant le champ. Autrement dit, Θ est identique à la fonction obtenue à la limite champ libre d'un espace plat. On peut obtenir de précieuses informations sur les orbites et les contraintes sur les valeurs que peuvent prendre les constantes du mouvement, en examinant l'extension aux régions permises, quand Θ est non négatif. Les résultats peuvent être résumés ainsi :

Cas (1), $Q > 0$

Dans ce cas, il y a toujours des solutions réelles dans laquelle θ balaie une région à cheval sur l'équateur ($\cos\theta = 0$). Cette région s'étend jusqu'à l'axe de symétrie $\sin\theta = 0$, si et seulement si $\Phi = 0$ et $Q + a^2(E^2 - \mu^2) \geq 0$.

De plus il y a une solution où θ est constant sur l'axe de symétrie $\sin\theta = 0$, quand $\Phi = 0$ et :

$$Q + a^2(E^2 - \mu^2) = 0$$

Cas (2), $Q = 0$

Dans ce cas il y a toujours des solutions réelles où θ est constant pour l'équateur, $\cos\theta = 0$. Il y a des solutions réelles dans lesquelles θ varie si et seulement si l'énergie est suffisamment élevée :

$$a^2(E^2 - \mu^2) > \Phi^2 \quad (74)$$

Si ceci est satisfait, θ varie dans un domaine touchant l'équateur d'un côté ou de l'autre. Le domaine s'étend jusqu'à l'axe de symétrie si et seulement si $\Phi = 0$. Le seul autre cas, où il y a des solutions réelles est celui où $\Phi = 0$ et $a^2(E^2 - \mu^2) = 0$, quand θ peut prendre n'importe quelle valeur constante quoi qu'il arrive.

Cas (3) $Q < 0$

Dans ce cas, il n'y a pas de solutions réelles, sauf si (74) est satisfait et si de plus :

$$Q \geq -\{[a^2(E^2 - \mu^2)]^{1/2} - |\Phi|\}^2. \quad (75)$$

Si (75) est satisfait comme inégalité stricte, θ varie dans un domaine qui ne touche pas l'équateur et qui s'étend jusqu'à l'axe de symétrie si et seulement si $\Phi = 0$. En cas d'égalité de (75), alors θ prend une valeur fixe dans un domaine compris strictement entre le plan équatorial et l'axe de symétrie, sauf quand $\Phi = 0$, auquel cas il est sur l'axe de symétrie.

Il n'est pas facile de donner une description complète du mouvement de la coordonnée r , car la fonction qui le contrôle $R(r)$ est une forme complète de degré 4. Les termes en puissance impaire ne s'éliminent pas comme pour $\Theta(\theta)$. Cependant nous pouvons quand même, assez simplement, donner quelques propriétés intéressantes de la solution.

La fonction $R(r)$ peut se développer sous la forme :

$$\begin{aligned} R = & (E^2 - \mu^2)r^4 + 2(\mu^2 m + \varepsilon e E)r^3 \\ & + [a^2 E^2 - \Phi^2 + e^2(\varepsilon^2 - \mu^2) - a^2 \mu^2 - Q]r^2 \\ & + 2[m(aE - \Phi)^2 + \varepsilon e a(aE - \Phi) + mQ]r \\ & - e^2(aE - \Phi)^2 - (a^2 + e^2)Q. \quad (76) \end{aligned}$$

De la forme du terme en puissance 4, on peut voir qu'aucune orbite ou géodésique ne peut s'échapper vers des régions asymptotiquement plates correspondant à une grande valeur (absolue) de r positif ou négatif, si elle a une énergie inférieure à l'énergie de libération, si $E^2 < \mu^2$, comme on peut l'escompter.

De la forme du terme constant de (76) on peut voir qu'aucune géodésique ou orbite ne peut couper l'hypersurface $r=0$ qui s'étend autour de l'embouchure de la singularité en anneau si Q est positif. De même si l'orbite ou la géodésique sont contenues dans le plan équatorial (le

chemin sera bloqué par la singularité elle-même, dans ce cas. Donc l'hypersurface $r = 0$ ne peut pas être traversée sauf si l'inégalité (74) est satisfaite.

Donc nous arrivons à la conclusion qu'aucune orbite ou géodésique ne peut passer à travers l'anneau pour passer d'une région où r est positif à l'autre où r est négatif (et vice versa) à moins que son énergie ne soit plus grande qu'une certaine valeur qui est sûrement supérieure que l'énergie de libération.

La répulsivité du champ gravitationnel à travers l'embouchure de l'anneau singulier, a déjà été remarquée par Carter (23), dans la mesure où elle s'applique à l'axe de symétrie, et la hauteur exacte de la barrière énergétique sur l'axe de symétrie a été calculée dans cette référence. En général l'énergie minimum pour franchir l'anneau va dépendre du moment angulaire etc., de manière souvent compliquée. Nous n'irons pas plus loin ici, mais nous remarquerons que les géodésiques et les particules avec suffisamment d'énergie peuvent franchir la singularité, sans dommage.

D. Structure géodésique de la singularité en anneau

Les résultats obtenus au chapitre 3C peuvent être utilisés pour contraindre très fortement les géodésiques et orbites qui atteignent la singularité $\rho^2 = 0$. Nous avons vu que r ne peut pas être nul si Q est positif et que $\cos \theta$ ne peut pas être nul si Q est négatif, donc la condition pour atteindre la singularité est

$$Q = 0 \quad (77)$$

De plus de la forme du terme constant dans (76) on voit que quand $Q = 0$, il est toujours impossible pour r d'atteindre la valeur 0 à moins que :

- soit l'égalité suivante soit satisfaite.

$$\Phi = aE \quad (78)$$

- soit la charge électrique e est nulle.

Pour des trajectoires de type temps ou lumière ($\mu^2 \geq 0$), (78) est incompatible avec (74) et si la trajectoire n'est pas entièrement contenue dans l'équateur (78) n'est pas possible, et c'est la charge e qui doit s'annuler. Dans ces conditions, les coefficients restants de (76) sont strictement tous positifs, et r ne peut atteindre la valeur zéro qu'en venant de très loin et en repartant très loin du côté des valeurs positives de r , et l'intégrale dans le membre de droite de (58) reste finie pendant l'opération ; d'autre part l'intégrale dans le membre de gauche de (58) diverge quand $\cos\theta$ tend vers zéro, ce qui implique que la géodésique ou l'orbite n'approche asymptotiquement de l'équateur que quand r tend vers l'infini.

Nous en concluons donc qu'une géodésique ou orbite de type temps ou nul ne peut pas atteindre la singularité sauf à rester entièrement contenue dans le plan équatorial, $\cos \theta = 0$. On peut même aller plus loin. Une étude des géodésiques équatoriales dans le cas non chargé ($e = 0$) a déjà été faite par Boyer et Lindquist qui ont déjà montré qu'il y a, en général, un domaine fini de moments angulaires possédant une énergie suffisamment élevée (définie pour un observateur éloigné de la singularité) du côté des r positifs de l'équateur peut atteindre la singularité.

Cependant quand la solution est chargée (ou si on considère l'approche par les r négatifs) la contrainte est bien plus sévère car (78) doit être satisfait. Autrement dit, une géodésique ou une orbite de particule chargée, d'une certaine énergie, peut uniquement atteindre la singularité que si elle a un moment angulaire bien déterminé. Même ceci n'est pas suffisant comme on peut le voir de la forme à laquelle (76) se ramène quand (77) et (78) sont satisfaits qui est :

$$R = (E^2 - \mu^2)r^4 + 2(\mu^2 m + \varepsilon e E)r^3 + [e^2(\varepsilon^2 - \mu^2) - a^2\mu^2]r^2. \quad (79)$$

Il est clair qu'il faut que le coefficient du terme en r^2 ne soit pas négatif, pour que la singularité puisse être atteinte, autrement dit la charge de la particule de test doit être suffisamment grande pour satisfaire :

$$\varepsilon^2 \geq (1 + a^2/e^2)\mu^2. \quad (80)$$

Si c'est l'inégalité stricte qui est satisfaite, c'est une condition suffisante pour atteindre la singularité depuis des points suffisamment proches sur l'équateur des deux côtés, alors que si c'est l'égalité qui est satisfaite la singularité ne peut être atteinte en général que depuis un seul côté (bien qu'il puisse y avoir des cas exceptionnels où l'énergie est telle que soit le terme quartique, soit le terme cubique s'annule).

Dans le cas particulier de géodésiques de type temps, l'inégalité (80) ne peut jamais être satisfaite sauf si a et e sont nuls simultanément (Schwarzschild). Dans le cas de géodésiques de type lumière ($\varepsilon = 0$, $\mu = 0$), le cas de l'égalité stricte est le seul cas possible, et la singularité peut être atteinte des deux côtés car le terme cubique de (79) s'annule.

Nous pouvons donc conclure que quand la solution est chargée aucune géodésique de type temps ne peut atteindre la singularité, et que les seules géodésiques de type lumière qui peuvent atteindre la singularité doivent être intégralement contenues dans l'équateur et avoir un moment angulaire unique bien déterminé donné par (78). Même quand la solution n'est pas chargée, les seules géodésiques de type temps ou lumière qui peuvent atteindre la singularité sont « confinées » dans l'équateur, mais Boyer et Linquist ont montré que dans ce cas qu'elles soient de type temps ou lumière, leur moment angulaire doit être compris entre deux valeurs finies bien précises.

Demandons-nous, ce que verrait un observateur qui chercherait la singularité visuellement, par exemple en recevant des photons qui seraient sortis de la singularité sur des géodésiques de type nul ?

S'il observe depuis un point sur l'équateur, quand le champ n'est pas chargé, il verrait la singularité comme une ligne unidimensionnelle de longueur finie, comme on peut l'espérer, puisqu'on voit un anneau de profil (sauf que selon les résultats de Boyer et Lindquist la ligne peut parfois être séparée en deux parties disjointes), cependant si le champ est chargé, la ligne ne sera vu que depuis l'équateur comme un point. Dans les deux cas (chargé ou non) la singularité sera totalement invisible pour un observateur hors du plan équatorial.

4. Implications

Le fait qu'il y ait des boucles temporelles à l'intérieur, n'affecte en rien la validité de l'interprétation de la métrique de Kerr comme solution des champs extérieurs d'un corps en rotation, du fait que le corps source est censé interdire l'accès à ces régions dans tous les cas. Cependant, on suppose (bien que cela ne soit pas prouvé) qu'une brisure de causalité devrait résulter de l'effondrement d'un corps en rotation. Les théorèmes de Penrose et Hawking qu'il doit se produire quelque chose de pas catholique quand un corps en rotation s'effondre, mais on peut avoir différentes positions là-dessus. D'un point de vue physique, la brisure la plus anodine serait le développement de singularité de courbure et de densité et c'est ce genre de curiosité qui a été considérée le plus souvent dans le passé. La raison qui fait que ce ne serait pas très grave, est qu'on suppose que de toute façon la Relativité Générale devra être modifiée dans les cas de courbure extrême pour s'accorder avec la physique quantique, et on espère que cela remédiera à la situation. Cependant, on peut aussi concevoir comme Lifchitz et Kalatnikov l'ont suggéré, que les singularités de courbure qui sont familières dans les solutions à haut degré de symétrie, n'existent pas dans le cas général ¹²

Les solutions de Kerr ont un groupe de symétrie plus réduit (à la connaissance de l'auteur) que les autres solutions où une étude analytique de la singularité de courbure a été faite (bien que la séparation qu'on a utilisé avec succès témoigne d'une symétrie quelle qu'elle soit) et les résultats du chapitre précédent semble donner un certain crédit à cette dernière idée. Alors, en partant de la solution de Schwarzschild et en réduisant progressivement la symétrie, la taille de la classe de géodésiques atteignant la singularité se réduit comme une peau de chagrin, jusqu'au cas chargé et en rotation où pratiquement aucune géodésique n'atteint la singularité, ce qui suggère qu'à la prochaine étape de réduction, aucune géodésique du tout atteindra la singularité (toutes les géodésiques seront complètes).

Même s'il reste quelques géodésiques incomplètes, leur importance est complètement marginalisée par la pathologie de la causalité qui semble s'accroître lorsque la symétrie se réduit. (Cependant, en dépit de cet effet apparent, l'existence ou l'absence de symétrie peut ne pas être aussi important qu'il apparaît, pour l'espace Taub-NUT qui a été étudié par Misner est bien plus symétrique que la solution de Kerr, et pourtant sa pathologie est d'une certaine manière bien pire : Il a des géodésiques incomplètes dans une région qui est localement non singulière, et il a aussi des boucles temporelles confinées dans n'importe quel voisinage , aussi mince que l'on veut, de l'horizon de causalité de la région causale, tandis que dans la solution de Kerr dans le cas où il y a un horizon causal (à $r = r_-$), toute boucle temporelle doit pénétrer profondément dans la région acausale derrière cet horizon).

Tout ceci suggère que la brisure dans la Relativité Générale doit être plutôt (ou au moins tout autant) de nature globale que locale, auquel cas c'est très sérieux. Si cela est avéré, on ne peut pas espérer y remédier par des modifications mineures significatives seulement dans les régions de courbure élevée, alors la théorie entière devra être abandonnée ou au moins drastiquement reformulée.

Remerciements :

L'auteur remercie les Dr. S. Hawking, R.W Lindquist, Prof. C.W Misner, Dr. R Penrose et le Dr D.W Sciama pour les discussions et les idées. Il est reconnaissant au Dr. R.H. Boyer pour ses encouragements et suggestions.

¹² Ils ont proposé les singularités « oscillantes » : BKL

Annexe (Rajoutée par JF)

1- Topologie de la solution de Kerr

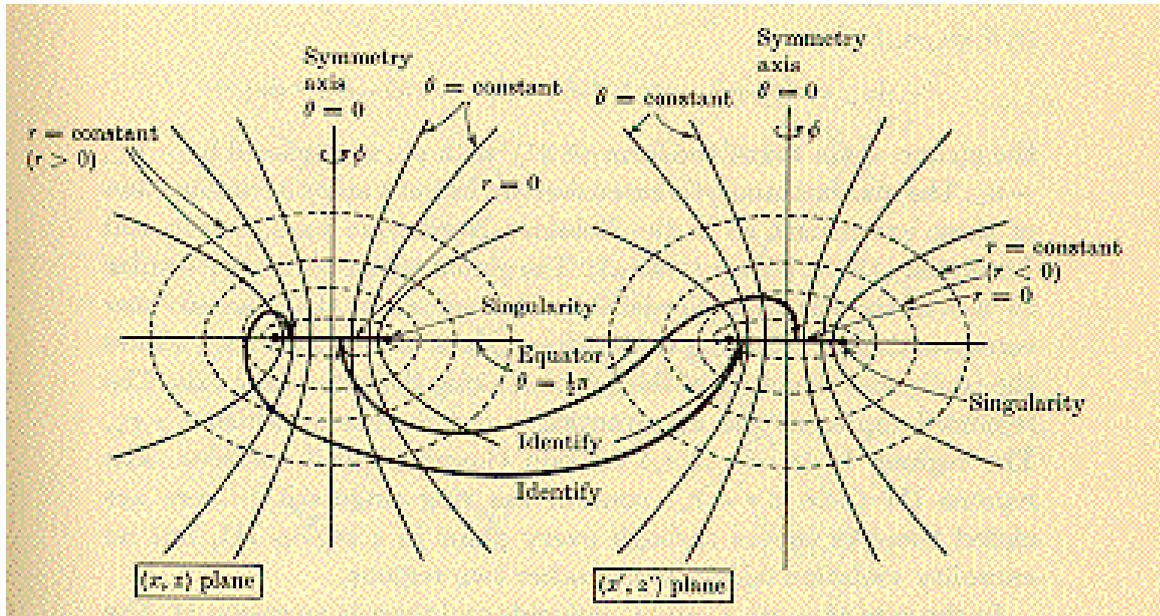


Figure 1 : L'extension maximale de la solution de Kerr pour $a^2 > m^2$ s'obtient en identifiant le dessus du disque $x^2 + y^2 < a^2$, $z=0$ dans l'hyperplan (x, y, z) avec le dessous du disque correspondant dans l'hyperplan (x', y', z') et vice versa. La figure montre la section plane pour $y=0$, $y'=0$ de ces hyperplans. En bouclant deux fois autour de la singularité à $x^2 + y^2 = a^2$, $z=0$, la première fois on passe de l'hyperplan (x, y, z) où $r > 0$ à l'hyperplan (x', y', z') pour lequel $r < 0$ et la deuxième fois on retourne à l'hyperplan de départ où $r > 0$.